

Modelo de la Regulación de las AFP en Colombia y su Impacto en el Portafolio de los Fondos de Pensiones*

Diego Jara**

Esta versión: 25 de octubre de 2006

Resumen

Es natural pensar que el futuro pensionado prefiere que su ahorro sea invertido eficientemente; es decir, sin tomar riesgos que no generen retornos adicionales. Sin embargo, no es claro que las AFP estén incentivadas a invertir en portafolios eficientes. En el caso colombiano, elementos como la estructura de comisiones y la rentabilidad mínima dadas en la regulación pueden desalinearse las preferencias del principal y el agente. Este trabajo presenta un modelo en el que las AFP son agentes que maximizan su utilidad esperada, y se demuestra numéricamente que la regulación, y en particular la rentabilidad mínima, causan que las AFP prefieran invertir en portafolios ineficientes. Es decir, es posible que esta regulación no proteja óptimamente los ahorros de los afiliados al sistema de pensiones obligatorias.

Clasificación JEL: D81; G11; G23

Palabras Clave: portafolio eficiente, función de utilidad, regulación de las AFP.

*Las opiniones y resultados expuestos en este documento son de exclusiva responsabilidad del autor y no comprometen al Banco de la República ni a los miembros de su Junta Directiva. Especial agradecimiento a Carolina Gómez por su valiosa colaboración en la elaboración de este trabajo. El autor agradece a Hernando Vargas, Juan Mario Laserna, Daniel Cortés, Felipe Gómez, Andrés Murcia, Eduardo Orejuela y Ana Fernanda Maiguashca por sus aportes.

**Investigador Principal, Banco de la República de Colombia.
E-mail: djarapin@banrep.gov.co, diegojara@gmail.com

1. Introducción

En Gómez, Jara y Pardo [2005], se analiza la eficiencia financiera de los fondos de pensiones en Colombia. La conclusión central es que la falta de diversificación en activos externos es causante de inversiones ineficientes. Lo que no se responde en ese trabajo es por qué las administradoras de los fondos de pensiones (AFP) se comportan de esta manera. La conjetura más natural es que las AFP no se benefician directamente por tomar decisiones de inversión eficientes. En efecto, la ley 100, en su artículo 101, decreta que “La totalidad de los rendimientos obtenidos en el manejo de los fondos de pensiones será abonada en las cuentas de ahorro pensional individual de los afiliados ...” Cabe preguntarse cómo se benefician las AFP. Aproximadamente el 83% de los ingresos mensuales de las AFP provienen del cobro de comisiones a los afiliados.¹ El resto proviene de la valorización de la Reserva de Estabilización (capital de las AFP invertida directamente en los fondos), porción que se beneficia directamente por la eficiencia de las inversiones, y de actividades de tesorería de las AFP (independientes en principio del manejo de los fondos). Luego para una administradora de fondos puede ser más importante ser eficiente en la consecución de cotizantes en el fondo, que ser eficiente en el manejo del dinero de los afiliados. Vale la pena notar que esto implica que inversiones ineficientes no implican un comportamiento irracional de las AFP: es posible que un presunto desalineamiento entre las preferencias del agente y el principal generado por la regulación incentive a administradoras racionales a invertir en fondos ineficientes.

Un punto a cuestionar es la relación que existe entre la inversión en portafolios eficientes y la atracción de nuevos afiliados al fondo. Arango y Melo [2006] miran la relación entre la rentabilidad (sin ajustar por riesgo) y el número de afiliados de un fondo, encontrando una relación positiva. Es decir, fondos con mayor rentabilidad eventualmente atraen un mayor número de afiliados. Este resultado desafía algunas intuiciones derivadas de la práctica: primero, la mayoría de los afiliados pueden esperar cotizar entre uno y dos salarios mínimos a lo largo de su vida laboral. Es decir, casi con seguridad - suponiendo un número de semanas de cotización mínimo - estarán cobijados por la garantía de pensión mínima que ofrece el estado (Ley 100, Artículo 65), y por lo tanto no deben preocuparse por el rendimiento de su cuenta individual.² Segundo, la evidencia anecdótica sugiere que los nuevos afilia-

¹Promedio mensual desde mayo de 2002 hasta noviembre de 2005 para el sistema de AFPs; fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del autor.

²Puede concluirse que estos afiliados tampoco deberían preocuparse por la ineficiencia de los fondos. De hecho, en este caso la preocupación recae sobre el gobierno. Ahora, si cotizantes con salarios bajos no cotizan suficientes semanas para acceder a la pensión

dos o los afiliados buscando cambiarse de fondo responden principalmente a otros incentivos a la hora de escoger su AFP, tales como obsequios que se les ofrece por afiliarse a cierto fondo; asimismo, esta evidencia sugiere que es muy poca la gente que observa el rendimiento (y menos aún la que observa el riesgo) de su cuenta individual. En este trabajo se mira esta relación desde una perspectiva distinta a la presentada por Arango y Melo, y no se observa que exista relación significativa entre la rentabilidad de un fondo y el número de afiliados que ingresan al fondo; en cambio, sí se observa un impacto fuerte del gasto que la AFP hace en personal e infraestructura en su número de afiliados.

Por el lado de los costos, estos se componen en más del 50 % en costos de personal e infraestructura, y en menores proporciones en impuestos, publicidad, custodia, procesamiento de datos y seguros. Un costo potencial muy importante (y normalmente ausente) es el de la garantía de la Rentabilidad Mínima: cumpliendo con el artículo 101 de la Ley 100, la Superintendencia Financiera define una cota mínima para la rentabilidad trianual de los fondos de pensiones. Las administradoras deben cubrir con capital propio cualquier déficit existente. A pesar de ser un costo al que solo una vez una AFP ha debido responder con capital propio en los más de diez años de funcionamiento del sistema, éste puede ser muy cuantioso, y por lo tanto puede afectar las decisiones de inversión de los fondos, máxime cuando no es claro que tomar el riesgo de incurrir en esa penalidad con el fin de conseguir rendimientos para el afiliado tenga beneficios considerables para la AFP.

El objetivo del presente trabajo es modelar el entorno regulatorio y de mercado de una AFP para tratar de identificar cuál debería ser su comportamiento óptimo (principalmente en términos de inversión del fondo de pensiones). La motivación es doble: primero, tratar de ofrecer una explicación económica para la ineficiencia de los fondos; segundo, plantear un modelo teórico para poder explicar el efecto de distintas partes de la regulación, y poder pronosticar el efecto que cambios en la regulación podrían tener sobre la inversión de los fondos, y en particular sobre su nivel de eficiencia.

La ineficiencia de los fondos de pensiones es un problema que puede tener consecuencias graves en el largo plazo. Por un lado, inversiones ineficientes pueden reducir drásticamente el ahorro pensional. Por ejemplo, una reducción promedio de 1 % en la rentabilidad anual de una cuenta de ahorro individual durante una vida laboral disminuye la pensión en aproximadamente 30 %. Asimismo, inversiones ineficientes son más sensibles a los ciclos económicos y financieros, y pueden causar disminuciones exageradas en las pensiones de

mínima, entonces sí deben preocuparse por la eficiencia de su fondo, ya que el saldo de su cuenta le será entregado al momento de pensionarse.

empleados que se retiran en puntos bajos del ciclo. Por otro lado, una estrategia de inversión que no busca portafolios eficientes puede estar acompañada de rebalances frecuentes, lo cual puede afectar el normal funcionamiento de los mercados financieros y su estabilidad, perjudicando las operaciones de otras entidades financieras. Finalmente, momentos de crisis en Colombia serán más fuertemente sentidos por portafolios concentrados; la reacción de sus administradores puede a su vez agravar la situación. Ahora, es natural suponer que los afiliados al sistema de pensiones obligatorias prefieren que sus ahorros sean invertidos eficientemente, en particular por las razones expuestas anteriormente. Esta premisa resalta la importancia de estudiar posibles desalineamientos entre el comportamiento de las AFP y los objetivos de sus afiliados.

Como es de esperarse, el objetivo presentado tiene pocas aspiraciones empíricas. Lo mejor que se puede esperar es construir un modelo que prediga con cierta cercanía el comportamiento actual (o histórico) de las AFP. Adicionalmente, el uso del modelo para pronosticar el impacto de cambios en la regulación no podrá ser sometido a *backtests*.

La literatura económica es bastante rica en monografías que resumen distintos esquemas de regulación de fondos de pensiones. Por ejemplo, Suescún [2001] resume el sistema colombiano de pensiones obligatorias, justificando la necesidad de regular el sistema, a la vez exponiendo puntos altamente debatidos por los mercados, las entidades reguladoras y los medios académicos. En particular, señala dos puntos: primero, los límites de inversión y las restricciones impuestas a activos riesgosos en general afectan la eficiencia (y en particular la rentabilidad de largo plazo) de los fondos, aunque pueden ser medidas justificables en mercados subdesarrollados; segundo, la rentabilidad mínima probablemente exagera un efecto manada natural en la composición de los portafolios pensionales. Resúmenes de otros países puede encontrarse en Devesa-Carpio y Vidal-Meliá [2002], y en Srinivas, Whitehouse y Yermo [2000], y en referencias contenidas en ellos.

En el conocimiento del autor, este es el primer esfuerzo para modelar microeconómicamente el entorno de las AFP con los objetivos expuestos.

Tomando en cuenta los aspectos cualitativos de los resultados³, varios puntos se evidencian del modelo presentado. Primero, es altamente probable que la regulación actual incentive inversiones en portafolios ineficientes; más específicamente, si se remueve la Rentabilidad Mínima de la regulación actual, el modelo indica que el comportamiento óptimo de una AFP es invertir

³Es importante resaltar que este modelo carece de validación empírica. Más aún, la dimensionalidad del portafolio de los fondos de pensiones hacen de éste un problema de muy lenta o incierta convergencia numérica. Por lo tanto, es importante no tomar los resultados como incotrovertibles, sino como indicaciones de posibles consecuencias.

en un portafolio eficiente. Por otro lado, la Rentabilidad Mínima se basa en los retornos de dos portafolios, que son el portafolio del sistema y un Portafolio de Referencia definido por la Superintendencia Financiera y que resulta ser un portafolio bastante ineficiente. El segundo punto es que mientras más peso tengan estos retornos en el cálculo de la Rentabilidad Mínima, más se acerca el portafolio óptimo para las AFP a estos portafolios. Es decir, la Rentabilidad Mínima causa que estos portafolios determinen un atractor para los fondos de pensiones; las AFP optimizan su utilidad (que es distinta a la de los afiliados) acercándose a ellos, en detrimento de la eficiencia del fondo de pensiones. Tercero, cambios tales como determinar un Portafolio de Referencia eficiente, o definir comisiones variables que dependan del rendimiento del fondo actuarían en favor de la eficiencia de los fondos de pensiones. En la misma línea, aumentar el monto mínimo de participación de las AFP en el portafolio del fondo mediante la Reserva de Estabilización las incentivaría a buscar inversioes más eficientes; es decir, el modelo confirma la intuición de que alinear los incentivos de las AFP y de sus ahorradores sería beneficioso para la eficiencia de las inversiones.

Esta introducción es la primera de cinco secciones. En la segunda se describe con más detalle el entorno de regulación y de mercado usados en la creación del modelo. La tercera sección plantea un modelo que plasma el entorno de una AFP. La cuarta sección muestra resultados del modelo, y efectos de cambios en la regulación. La sección final concluye.

2. Regulación de las AFP en Colombia

La Ley 100 sentó las bases para la creación de las Administradoras de los Fondos de Pensiones. La Superintendencia Financiera es la entidad responsable de regular y vigilar las operaciones de las AFP en Colombia, tomando en cuenta lo prescrito por la ley. A continuación se exponen los elementos relevantes de esta regulación.

2.1. Régimen de Inversión

Los portafolios de los fondos de pensiones deben satisfacer ciertas restricciones de inversión descritas en la Circular Externa 034 de 2005⁴. En ella se describen las inversiones admisibles; asimismo, se dan requisitos mínimos de calificación para que un activo sea admisible para inversión, y se imponen límites individuales por emisor, por emisión, por inversión en entidades vinculadas, restricciones a concentración accionaria, y a operaciones de cobertura

⁴Circular Básica Jurídica, Título 4, Capítulo 4.

mediante el uso de derivados. Finalmente, se listan los límites de inversión por clase de activos (límites globales de inversión). A continuación se listan los límites de inversión más relevantes:

- Máximo 50 % en deuda pública⁵
- Máximo 10 % en títulos de FOGAFIN y FOGACOOOP
- Máximo 30 % en títulos de renta fija de instituciones vigiladas por la Superintendencia Financiera
- Máximo 30 % en títulos de renta fija de instituciones no vigiladas por la Superintendencia Financiera
- Máximo 30 % en títulos de renta variable
- Máximo 5 % en FCOs (que entran al rubro de renta variable)
- Máximo 2 % en depósitos a la vista
- Máximo 20 % en títulos de agentes externos
- Máximo 20 % de posición descubierta en moneda extranjera
- Mínimo 0 % en todos los activos y en la exposición cambiaria descubierta

Diversos trabajos critican este tipo de imposición de límites por tipo de activo, arguyendo que se puede reducir drásticamente la eficiencia de los portafolios resultantes (ver Shah [1997], Solís-Soberón [1999] y Suescún [2001]). En Jara, Gómez y Pardo [2005] se concluye que de los límites anteriores, el único que afecta considerablemente la frontera eficiente es el de 20 % en activos externos⁶.

2.2. Esquema de Cotizaciones para Empleados

El artículo 20 de la Ley 100⁷ establece que en el 2006 y 2007, el afiliado debe aportar para su pensión el 15.5 % de su salario base de cotización (reglamentado por el gobierno nacional de acuerdo con el tipo de salario).⁸ Este monto es dividido en tres partes: el 11 % del salario base de cotización va dirigido a la cuenta individual de ahorro pensional, el 3 % se da a la AFP para

⁵Este límite lo establece la Ley 100 en su artículo 100.

⁶Con los datos y modelos de ese estudio, se asigna aproximadamente 1 % de disminución promedio en la rentabilidad esperada real de los portafolios eficientes en mayo de 2005.

⁷Subsecuentemente modificado por el artículo 7 de la Ley 797 de 2003.

⁸Dicho porcentaje aplica para el 2006 y 2007. A partir del 2008 el gobierno puede subirlo a 16.5 % si el crecimiento económico del país ha sido igual o superior a 4 % en promedio durante el 2006 y 2007.

cubrir los gastos de administración y primas de seguros, y el 1.5 % restante va al Fondo de Garantía de Pensión Mínima. El empleador debe suministrar el 75 % del aporte total, y el restante 25 % está a cargo del empleado. Adicionalmente, es responsabilidad del empleador recaudar y trasladar a la AFP los montos correspondientes.

2.3. Estructura de Comisiones

La Circular Básica Jurídica y la Ley 100 describen cuatro tipos de comisión que pueden cobrar las AFP⁹:

- **Comisión de administración para nuevas cotizaciones:** como se vio en el punto anterior, las AFP reciben el 3 % del ingreso base de cotización de cada afiliado activo, de donde deben cubrir los gastos de primas de seguros de FOGAFIN, y las de invalidez y sobrevivientes, descritos más adelante. Las AFP normalmente dedican alrededor del 47 % de la comisión en estas primas.
- **Comisión por administración de pensiones bajo la modalidad de Retiro Programado:** las AFP no pueden cobrar mensualmente más del mínimo entre
 - ▶ 1 % del rendimiento mensual de la cuenta
 - ▶ 1.5 % de la mesada pensional.
- **Comisión por administración de recursos de afiliados cesantes¹⁰:** las AFP pueden cobrar como máximo el valor dado por el mínimo entre
 - ▶ 4.5 % del rendimiento mensual
 - ▶ 50 % de la comisión de administración para nuevas cotizaciones de ese mes, sobre el último ingreso base de cotización ajustado anualmente por inflación.
- **Comisión por traslado de Afiliados:** la AFP de la cual se traslada el afiliado puede cobrar como máximo el mínimo entre
 - ▶ 1 % del ingreso base de cotización del último recaudo
 - ▶ 1 % de cuatro salarios mínimos legales vigentes.

⁹La primera es descrita en el Artículo 20 de la Ley 100, y las otras tres en el Título IV, Capítulo 2 de la Circular Básica Jurídica.

¹⁰Afiliados que han dejado de cotizar por lo menos por tres meses consecutivos.

Hay algunos puntos que vale la pena resaltar de esta estructura. Primero, la comisión de administración no toma en cuenta el tiempo que le falta al afiliado para pensionarse. Si se supone que la comisión por administración que cobran las AFP es igual a 1.5 % del ingreso base de cotización de los afiliados activos, entonces la comisión efectiva por nuevos aportes es $1.5\%/11\% = 13.6\%$. Es una comisión que se paga solo una vez por cada peso aportado, sin importar si es administrado por un año o por treinta años. Este nivel de comisión es supremamente alto para alguien a quien le queda poco tiempo para pensionarse, pero es bajo para alguien quien mantendrá esos nuevos aportes por muchos años antes de retirarlos (si a un afiliado le restan treinta años para pensionarse, este costo es de aproximadamente 45 puntos básicos por año). Segundo, la comisión por administración no hace referencia al monto de ahorro de los afiliados, que puede afectar los costos de administración de los fondos. Tercero, como dispone el artículo 101 de la Ley 100, la totalidad del rendimiento de los fondos es propiedad de los afiliados. Es decir, las AFP no pueden cobrar comisión variable según los rendimientos del fondo, lo cual puede afectar el incentivo de escoger portafolios eficientes.

2.4. Rentabilidad Mínima

El artículo 101 de la Ley 100 establece que las AFP deben garantizar una Rentabilidad Mínima (RM) a sus afiliados. En caso de fallar en su consecución, la AFP debe responder por el déficit, afectando inicialmente la Reserva de Estabilización (descrita más adelante). En caso de no poder cumplir, FOGAFIN debe cubrir este déficit. En última instancia entraría el Gobierno Nacional a responder. Para ser claros, este déficit se define como el monto mínimo que debe ser adicionado al fondo, con corte igual a la fecha de medición, para que el rendimiento del fondo dilatado sea igual a la RM.

El Gobierno Nacional, mediante la Superintendencia Financiera, define la RM en el decreto 1592 de 2004 según la siguiente fórmula¹¹:

$$RM = 70\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})], \text{ donde}$$

- R_S es el retorno promedio del sistema de los fondos de pensiones, ponderado por el tamaño de los fondos (acotado superiormente por 20 %).
- R_{RVL} es el retorno del índice accionario IGBC.
- R_{RVE} es el retorno (en pesos) del índice accionario S&P 500.

¹¹El Apéndice A muestra la evolución histórica de esta fórmula.

- R_{PR} es el retorno del portafolio de referencia, definido por la Superintendencia Financiera, y conformado en su mayoría por deuda pública interna, CDTs y títulos comerciales.
- α es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en acciones locales.
- β es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en renta variable externa.

Con la intención de promover inversiones con horizontes de largo plazo, los cálculos se hacen trimestralmente sobre retornos trianuales. Los porcentajes relevantes (α y β) se calculan promediando los porcentajes diarios durante los tres años del cálculo. Los retornos de los fondos se definen como la tasa interna de retorno (TIR) de los flujos de caja definidos por:

- Valor inicial del fondo (entrada)
- Nuevos aportes al fondo en los tiempos correspondientes (entrada)
- Transferencias de fondos (por traspasos y pensiones) del y al fondo en los tiempos correspondientes (salida y entrada)
- Valor final del fondo (salida)

La RM se calcula similarmente usando como entradas el valor inicial de los portafolios y los ajustes (por rebalanceo, pago de dividendos y de cupones), y como salida el valor final de los portafolios. En el Apéndice A se compara el rendimiento de los fondos con la RM desde 1999.

Varias preguntas surgen naturalmente:

- ◇ ¿Es posible que un efecto manada natural sea exacerbado por esta reglamentación?
- ◇ ¿Qué efecto tiene la RM sobre el comportamiento de las AFP, y en particular sobre la composición de los portafolios pensionales? ¿Es posible que ella incentive invertir en portafolios ineficientes al forzar a las AFP a pensar en su propio riesgo más que en el riesgo de sus afiliados?
- ◇ ¿El uso de retornos trianuales en la medición efectivamente incentiva inversiones con horizontes de largo plazo, o es posible que la medida obligue a los fondos a concentrarse en los meses del futuro inmediato?
- ◇ ¿Cuál es el objetivo de la RM? ¿Se está logrando este objetivo?
- ◇ ¿Es posible que la RM esté causando una desdiversificación del ahorro pensional agregado colombiano mediante el incentivo que genera en los fondos de tener inversiones similares?

- ◊ Al notar que la RM es una opción put con *strike* (precio de venta) móvil que posee el afiliado sobre sus ahorros, vale la pena preguntar cuál es el costo de esta put. Igualmente, vale la pena preguntar cómo paga el afiliado por ella, y conjeturar que el costo se refleja posiblemente en inversiones ineficientes por parte de la AFP. ¿Está esto en línea con las preferencias del ahorrador colombiano? Finalmente, como se observa en el Apéndice A, la RM fue reducida sustancialmente en el año 2004. Efectivamente lo que se hizo fue reducir el strike en un 22%. Si a un dueño de una opción put le reducen su strike, éste debería obtener una compensación por dicho cambio. En el caso del ahorrador colombiano, nunca se efectuó tal compensación. Esto puede hacer pensar que el ahorrador colombiano está pagando una prima por un contrato que puede ser alterado unilateralmente sin tener derecho a compensación, y reforzar la posibilidad de que el ahorrador promedio no desea comprar esta opción.

2.5. Reserva de Estabilización

Para garantizar un mínimo de cumplimiento de la RM, la Superintendencia Financiera, mediante el decreto 721 de 1994, creó la Reserva de Estabilización para las AFP. Cada AFP debe participar con su propio capital en al menos el 1% del fondo de pensiones administrado. Esta reserva será usada inmediatamente para cubrir déficits causados por incumplimiento de la RM, si estos existen. Es interesante notar que, indirectamente, esta figura provee al sistema de un incentivo para realizar inversiones eficientes, aunque por ahora éste no sea muy grande (en la medida en que los fondos crezcan, el 1% será cada vez un monto más importante para las AFP, y el rendimiento de los fondos será una línea importante en los ingresos mensuales de la AFP).

2.6. Margen de Solvencia

En el decreto 1797 de 1999 se estipula que el valor de los activos administrados por las AFP, excluyendo los emitidos o avalados por la Nación, y excluyendo la Reserva de Estabilización, no puede ser mayor que 48 veces su patrimonio técnico.

2.7. Seguros a Cargo de la AFP

Como se mencionó anteriormente, es responsabilidad de cada AFP contratar los seguros previsionales para sus afiliados; las primas son cubiertas por la comisión de administración para nuevas cotizaciones. Hay dos tipos

de eventualidades que requieren la compra de estos seguros. La primera es una posible carencia de recursos por parte de la AFP para cubrir defectos en la RM. En estos casos FOGAFIN debe responder por estos defectos; para garantizar esto, la AFP contrata con FOGAFIN un seguro en el momento en que nuevas cotizaciones llegan al fondo. La segunda es una posible carencia de fondos en la cuenta individual (y bono pensional, si a él hubiere lugar) para cubrir las pensiones por invalidez y a sobrevivientes, en el caso de afiliados (o familiares) que cumplan con requisitos mínimos de tiempo cotizado y tuvieran derecho a estas pensiones¹². La aseguradora contratada debe cubrir esta carencia.

2.8. Garantías del Estado

En el caso del sistema de pensiones obligatorias, el estado (no la AFP o las aseguradoras) es responsable de garantizar a los afiliados como mínimo una pensión de un Salario Mínimo Legal Vigente (SMLV) para las pensiones de vejez, invalidez y sobrevivientes, cuando a ellas tuviera derecho el afiliado o sus sobrevivientes. En el caso de pensión por vejez, un afiliado tiene derecho a esta pensión mínima si cumplió 57 años en el caso de mujeres y 62 en el caso de hombres, y cotizó mínimo 1150 semanas¹³. Este es un punto de constante discusión, ya que una gran parte de la fuerza laboral cotiza en intervalos intermitentes, y posiblemente no podrá acumular el mínimo exigido de semanas cotizadas. Por ejemplo, Ayala y Acosta [2002] exponen serios problemas en el diseño e implementación del sistema pensional, señalando en particular el alto costo de la garantía de la pensión mínima, por estar ligada al nivel del salario mínimo, lo cual ha generado restricciones severas representadas en el tiempo mínimo de cotización necesaria.

¹²En caso de muerte de un pensionado, los beneficiarios (definidos en el Artículo 74 de la Ley 100) tienen derecho a seguir recibiendo el 100 % de la pensión. En caso de muerte de un afiliado no pensionado, los beneficiarios reciben el 45 % del ingreso base de liquidación más 2 % por cada 50 semanas cotizadas por encima de 500 (sin que se exceda 75 %). En ningún caso la pensión puede ser menor que 1 SMLV. La pensión se paga por un intervalo de tiempo que depende del caso. Los requisitos para poder acceder a esta pensión son que el afiliado tuviera más de 20 años y además: si la muerte fue accidental, que hubiera cotizado como mínimo el 20 % del tiempo entre los 20 años y su muerte; si la muerte es por enfermedad, que hubiera cotizado mínimo el 25 % de este intervalo (Artículos 73, 46 y 48 de la Ley 100). El seguro de invalidez tiene especificaciones similares, reconociéndola a trabajadores que hayan perdido al menos el 50 % de su capacidad laboral.

¹³Artículo 65 de la Ley 100.

3. Modelo del Entorno de una AFP

Se visualiza a una AFP como una empresa cuyas directivas tienen como objetivo tácito maximizar la utilidad esperada de sus accionistas. En la práctica las AFP controlan muchas variables dentro del entorno de regulación y de mercado. Para simplificar, el modelo supone que las directivas de las AFP controlan la composición de los portafolios del fondo de pensiones y de su tesorería, y además controlan dos variables adicionales: el porcentaje del capital a ser repartido como dividendos a los accionistas y la cantidad de capital asignada a la Reserva de Estabilización.

A continuación se introducen las distintas variables de estado del problema, las constantes definidas en el entorno de las AFP, y las ecuaciones de evolución. La estructura de ingresos y egresos para una AFP se obtienen de los estados financieros disponibles por cada AFP de la Superintendencia Financiera.

Intuitivamente, lo que se pretende modelar es una AFP pequeña, para poder suponer que sus acciones no afectan el comportamiento de las demás AFP (por ejemplo, mediante mecanismos tales como la Rentabilidad Mínima, que incluye el rendimiento del sistema ponderado por el tamaño de los fondos de cada AFP).

En lo que sigue, se escribe T para denotar el horizonte de inversión (en años) de los accionistas de la AFP, y se trabaja con periodos anuales en el análisis dinámico.

3.1. Activos y Límites de Inversión del Fondo de Pensiones

Dada la necesidad de reducir la dimensionalidad del problema, se toman 11 clases representativas de activos en los cuales los fondos pueden invertir:

- TES tasa fija de Corto Plazo - TCP
- TES tasa fija de Largo Plazo - TLP
- TES ligados a la inflación (UVR e IPC) - $TUVR$
- Bonos corporativos colombianos - BCC
- Renta variable local - RVL
- Deuda externa colombiana - $YANK$
- Deuda gubernamental de países desarrollados - DGD
- Deuda gubernamental externa de países emergentes con calificación aceptable - $DEGE$

- Deuda gubernamental interna de países emergentes con calificación aceptable - *DIGE*
- Deuda corporativa externa - *DCE*
- Renta variable externa - *RVE*

En adición, se incluye la posibilidad de cubrir la exposición en moneda externa mediante forwards - *FWD* - (monedas distintas al dólar pueden ser cubiertas contra el peso haciendo dos derivados y usando el dólar como moneda intermedia). Con esto, se usará $N = 12$ como el número de instrumentos de inversión, teniendo en cuenta que cualquier portafolio $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{12}]$ debe satisfacer $w_1 + w_2 + \dots + w_{11} = 100\%$.

Los límites de inversión se resumen aquí:

- $0\% \leq$ Todo activo
- $TCP + TLP + TUVR + YANK \leq 60\%$ (el 50% de la regulación se ajusta por la posibilidad de inversión en deuda similar en riesgo a deuda pública, como bonos FOGAFIN)
- $YANK \leq 50\%$
- $RVL \leq 20\%$ (se baja del 30% de la regulación para ajustar por la poca profundidad del mercado)
- $BCC \leq 30\%$ (se baja de 60% de la regulación para ajustar por la poca oferta en el mercado)
- $0\% \leq FWD \leq 30\%$ (esta cantidad también modela una restricción de mercado)
- $0\% \leq YANK + DGD + DEGE + DIGE + DCE + RVE - FWD \leq 20\%$
- $DGD + DEGE + DIGE + DCE + RVE \leq 20\%$

Finalmente, se simplifica la incertidumbre de los retornos con una suposición de distribución normal multidimensional, con media, desviación estándar y matriz de Correlación dadas a continuación. La determinación de esta distribución está basada en la metodología expuesta en Gómez, Jara y Pardo [2005], para lo cual se usa un modelo forward-looking para los retornos esperados, y volatilidades históricas para la matriz de Covarianza. Las fuentes y construcción de las series de tiempo están descritas en el Anexo B. Las Tablas 1 y 2 muestran los retornos esperados, desviación estándar de los retornos y matriz de correlación de retornos usados en el modelo para las clases de activos definidas anteriormente.¹⁴

	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
$E[R]$ (%)	6.24	6.79	5.82	7.89	13.69	6.77
σ (%)	3.54	10.08	7.60	6.36	25.24	10.64

	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
$E[R]$ (%)	6.35	8.78	6.80	6.95	10.62	0.0
σ (%)	10.8	8.53	13.9	8.92	16.83	7.16

Tabla 1: Media ($E[R]$) y Desviación Estándar (σ) modeladas para los retornos de los activos. Datos en porcentaje en pesos nominales.

	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
TCP	100	41	11	25	14	-22	-24	-15	-24	5	76	32
TLP	41	100	17	25	12	-15	-19	-11	-15	6	53	25
TUVR	11	17	100	7	-5	3	-1	4	5	2	12	2
BCC	25	25	7	100	9	-13	-18	-2	-18	11	32	20
RVL	14	12	-5	9	100	34	48	35	46	27	17	-37
YANK	-22	-15	3	-13	34	100	82	77	87	2	-31	-72
DGD	-24	-19	-1	-18	48	82	100	59	93	17	-37	-89
DEGE	-15	-11	4	-2	35	77	59	100	61	15	-19	-54
DIGE	-24	-15	5	-18	46	87	93	61	100	15	-35	-83
DCE	5	6	2	11	27	2	17	15	15	100	0	-24
RVE	76	53	12	32	17	-31	-37	-19	-35	0	100	44
FWD	32	25	2	20	-37	-72	-89	-54	-83	-24	44	100

Tabla 2: Matriz de Correlación modelada para los retornos de los activos. Datos en porcentaje.

Dado el desconocimiento de la información económica y financiera que puede llegar en el futuro, se supone que la distribución se mantiene constante en los periodos futuros.

¹⁴La deuda emergente es menos volátil que la desarrollada; esto se explica con la volatilidad cambiaria: la deuda emergente se denomina casi en su totalidad en dólares, mientras que la desarrollada se denomina en dólares, euros y yenes. Siendo el dólar-peso bastante menos volátil que el euro-peso y el yen-peso, se explica esta aparente paradoja.

3.2. Variables de Control

- $\mathbf{w}_{PORT}(N \times 1)$, vector que indica la tenencia porcentual del fondo de pensiones en cada activo.
- $\mathbf{w}_{TESOR}(N \times 1)$, vector que indica la tenencia porcentual de la AFP en cada activo, correspondiente a actividades de tesorería.
- DIV , porcentaje del patrimonio que excede la Reserva de Estabilización y la restricción de solvencia, a ser repartido en cada periodo a los accionistas.
- RE , porcentaje del fondo asignado a la Reserva de Estabilización.

En principio estas variables pueden variar con el tiempo. Las restricciones de \mathbf{w}_{PORT} se escribieron en el punto anterior. Otras restricciones de estas variables son:

$$\begin{aligned} 0\% &\leq DIV \leq 100\% \\ 1\% &\leq RE \leq 100\%. \end{aligned}$$

Por simplicidad dimensional, en los casos más generales se supondrá que \mathbf{w}_{TESOR} es dado, para la cual se usará un portafolio eficiente dada la regulación de los FPO. Se debe tener en cuenta que este portafolio no tiene tales restricciones. En los casos sencillos, se supondrá igualmente que este portafolio debe satisfacer las restricciones de los FPO, por simplicidad.

3.3. Variables de Estado y Ecuaciones de Evolución

A continuación se definen las variables de estado del modelo, entendiendo las cantidades monetarias en miles de millones de pesos colombianos.

- Retornos durante el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.
 - $r_i(t)$, retorno del activo i .
 - $R_{PORT}(t)$, Retorno del fondo de pensiones.
 - $R_{SIST}(t)$, Retorno del promedio del sistema de fondos.
 - $R_{PR}(t)$, Retorno del Portafolio de Referencia.
 - $R_{TESOR}(t)$, Retorno del portafolio de tesorería.
 - $R_1(t)$, Retorno anual del fondo de pensiones durante los últimos tres periodos.
 - $R_2(t)$, Rentabilidad Mínima calculada con datos del periodo t .

- $R_{RM}(t)$, Rentabilidad Mínima vigente para el periodo t (es decir, calculada y agregada para los últimos tres años).
- Ingresos para el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.
 - $I_{COM}(t)$, Ingresos por comisiones.
 - $I_{RE}(t)$, Valoración de la Reserva de Estabilización.
 - $I_{TESOR}(t)$, Valoración del portafolio de tesorería.
- Costos para el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.
 - $C_{PER}(t)$, Costo de personal e infraestructura.
 - $C_{IMP}(t)$, Egresos por pago de impuestos.
 - $C_{PUBL}(t)$, Costo de publicidad y propaganda.
 - $C_{RM}(t)$, Egresos por Rentabilidad Mínima.
 - $C_{OTR}(t)$, Otros costos.
- Información del fondo para el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.
 - $J_{AFIL}(t)$, Número de afiliados al fondo.
 - $J_{APOR}(t)$, Nuevos aportes al fondo de pensiones.
 - $J_{TAM}(t)$, Tamaño del fondo.
 - $J_{PENS}(t)$, Nuevos pensionados del fondo.
 - J_{EDAD} , edad promedio inicial de afiliados a la AFP.
 - $J_{RET}(t)$, Retiros del fondo por nuevos pensionados.
 - $J_{SAL}(t)$, Nivel promedio de salarios de los afiliados de la AFP.
- Información del sistema de fondos para el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.
 - $J_{COST}(t)$, Total de gastos en personal e infraestructura del sistema.
 - $J_{TAM\ SIST}(t)$, Tamaño del sistema de fondos de pensiones.
 - $J_{AF\ SIST}(t)$, Número de afiliados del sistema.
 - $J_{PENS\ SIST}(t)$, Nuevos pensionados del sistema.
 - $J_{RET\ SIST}(t)$, Retiros del sistema por nuevos pensionados.
 - $J_{SAL\ SIST}(t)$, Nivel promedio de salarios de los afiliados al sistema.
- Variables contables para el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.

- K_{CAP} , Capital inicial invertido por accionistas en la AFP.
 - $K_{RE}(t)$, Tamaño de la Reserva de Estabilización.
 - $K_{PAT}(t)$, Patrimonio de la AFP.
 - $K_{TESOR}(t)$, Tamaño del portafolio de tesorería.
 - $K_{DIV}(t)$, Dividendos repartidos en el período t .
 - $K_{ING}(t)$, Total ingresos de la AFP.
 - $K_{COST}(t)$, Total egresos de la AFP.
- Otras variables para el periodo t , $t = 1, 2, \dots, T$.
- $\eta(t)$, número total de nuevos afiliados en el sistema.
 - J_{RETIRO} , Edad de retiro; se usa 60 años, simplificando así un promedio entre la edad de retiro para hombres y para mujeres.
 - $\alpha_{PENS}(t)$, Porcentaje de afiliados que se pensionan en el período.
 - $w_{DP}(t)$, Proporción del fondo de pensiones invertido en deuda pública.

Para las variables de Costos, Información del fondo, Información del sistema y Contables, es necesario definir un valor en $t = 0$ como condición inicial¹⁵.

Las ecuaciones de evolución se definen a continuación, para $t = 1, \dots, T$. Para las variables de retornos, ingresos, costos, y las últimas tres contables, se entienden las cantidades determinadas para el período t como lo sucedido entre $t - 1$ y t . Las demás variables se interpretan como cantidades existentes en el tiempo t . Intuitivamente, cada período comienza con el nuevo aporte de los afiliados.

Retornos Escribiendo $\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ \dots \ r_N(t)]$, las ecuaciones relevantes son:

$$\begin{aligned}
R_j(t) &= \mathbf{w}_j(t) \cdot \mathbf{r}(t), \quad j = PORT, TESOR, SIST, PR \\
R_1(t) &= [(1 + R_{PORT}(t))(1 + R_{PORT}(t-1))(1 + R_{PORT}(t-2))]^{1/3} - 1 \\
R_2(t) &= \alpha_R \times (\alpha_P \times R_{SIST}(t) + (1 - \alpha_P) \times R_{PR}(t)) \\
R_{RM} &= [(1 + R_2(t))(1 + R_2(t-1))(1 + R_2(t-2))]^{1/3} - 1,
\end{aligned}$$

¹⁵Para esto se toma la información de un fondo específico pequeño disponible a noviembre de 2005. Fuente: Superintendencia Financiera; cálculos del autor. Estos datos se listan en el Apéndice C.

donde \mathbf{w}_{SIST} y \mathbf{w}_{PR} son los portafolios del sistema de los fondos, y el de referencia (incluyendo la participación accionaria local y externa), respectivamente, $R_{PORT}(0)$, $R_{PORT}(-1)$, $R_2(0)$, $R_2(-1)$ se suponen dados, y α_R y α_P son coeficientes usados para definir la rentabilidad mínima, que en la actualidad asumen los valores 70% y 50%, respectivamente. Finalmente, se escribe explícitamente la suposición de distribución de los activos como

$$\mathbf{r}(t) \sim \mathfrak{N}(\mu, \Sigma),$$

donde μ , y Σ son los retornos esperados anuales y la matriz de Varianza-Covarianza, respectivamente; esta matriz es derivada de las Tablas 1 y 2.

J_{AFIL} , J_{PENS} , $J_{AF\ SIST}$ y $J_{PENS\ SIST}$ Es natural proponer el número de afiliados de un fondo como dependiente del retorno trianual del fondo (que es la información que disemina la Superintendencia Financiera), de los costos de publicidad y de los costos de personal e infraestructura. Como se muestra en el Anexo C, la única variable estadísticamente significativa resultante de un estudio panel de los seis fondos es la última. Dada esta información, se procede a explicar el cambio en el número de afiliados de un fondo con la proporción con que esta AFP contribuye al sistema en los costos de personal e infraestructura, multiplicada por el número total de nuevos afiliados en el sistema. Intuitivamente, se propone que la proporción del total de nuevos afiliados en el sistema que eligen la AFP en cuestión, se afecta únicamente por la proporción del costo total del sistema en personal e infraestructura incurrida por la AFP. Esta regresión permite aceptar un coeficiente igual a 1, condición necesaria para que los afiliados nuevos al sistema se repartan entre las AFP (ver Anexo C):

$$\tilde{J}_{AFIL}(t) = J_{AFIL}(t-1) + \frac{C_{PER}(t-1)}{J_{COST}(t-1)} \eta(t)(1 + \varepsilon(t)),$$

donde $\varepsilon(t) \sim \mathfrak{N}(0, 0,08)$ modela un elemento estocástico en el cambio del número de afiliados de la AFP. Vale la pena notar que se hace referencia al costo en personal del período anterior, asignando un rezago al efecto. Se escribe \tilde{J} porque falta ajustar por los nuevos pensionados. Para esto, se supone que J_{EDAD} es constante en los afiliados existentes. Dada la joven población cotizante en la actualidad, se supone además que esta es la edad de los nuevos afiliados. Finalmente se aproxima la pirámide que surge naturalmente en este cálculo con la siguiente simplificación:

$$\alpha_{PENS}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < J_{RETIRO} - J_{EDAD} \\ \frac{0,5}{J_{RETIRO} - J_{EDAD}}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Luego se obtiene

$$\begin{aligned} J_{AFIL}(t) &= \tilde{J}_{AFIL}(t)(1 - \alpha_{PENS}(t)) \\ J_{PENS}(t) &= \tilde{J}_{AFIL}(t)\alpha_{PENS}(t) \end{aligned}$$

Por otro lado, una regresión lineal simple usando los últimos cuatro años de datos arroja la siguiente expresión para $\eta(t)$, en donde la fecha base ($t = 0$) es noviembre de 2005 (ver Anexo C):

$$\eta(t) = 596,000 + 66,500 \times t.$$

El número total de afiliados al sistema, antes de ajustar por pensionados, cumple

$$\tilde{J}_{AF\ SIST}(t) = J_{AF\ SIST}(t-1) + \eta(t),$$

donde $J_{AF\ SIST}(0) = 6,315,000$ (el número de afiliados en el sistema en Septiembre de 2005). Así, suponiendo un porcentaje de nuevos pensionados para el sistema igual que para el fondo analizado, se puede escribir

$$\begin{aligned} J_{AF\ SIST}(t) &= \tilde{J}_{AF\ SIST}(t)(1 - \alpha_{PENS}(t)) \\ J_{PENS\ SIST}(t) &= \tilde{J}_{AF\ SIST}(t)\alpha_{PENS}(t) \end{aligned}$$

J_{APORT} , J_{TAM} , y $J_{TAM\ SIST}$ $J_{SAL}(t)$ y $J_{SAL\ SIST}(t)$ se suponen crecientes con la inflación, empezando en niveles obtenidos a partir de la fórmula

$$J_{SAL}(0) = \frac{\text{Recaudo de comisión de administración}(0)}{3\% \times \text{Número de Afiliados Activos}(0)}.$$

$J_{SAL\ SIST}(0)$ se calcula análogamente. Finalmente, se introduce la constante α_{CES} que indica la proporción de afiliados que están cesantes (se usa $\alpha_{CES} = 40\%$ uniformemente para todas las AFP, valor basado en información de afiliados dada por la Superintendencia Financiera). Con esto, se dan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} J_{APORT}(t) &= \alpha_{APORT} J_{SAL}(t) J_{AFIL}(t) (1 - \alpha_{CES}) \\ J_{TAM}(t) &= J_{TAM}(t-1)(1 + R_{PORT}(t)) + J_{APORT} \\ &\quad - J_{PENS}(t) J_{RET}(t) \\ J_{TAM\ SIST}(t) &= J_{TAM\ SIST}(t-1)(1 + R_{SIST}(t)) \\ &\quad + J_{AF\ SIST}(t) J_{SAL\ SIST}(t) \alpha_{APORT} (1 - \alpha_{CES}) \\ &\quad - J_{PENS\ SIST}(t) J_{RET\ SIST}(t) \end{aligned}$$

En las anteriores líneas, $\alpha_{APORT} = 11\%$ es el porcentaje del salario base de cotización que alimenta las cuentas individuales de ahorro. Por otro lado, se supone que el porcentaje de afiliados que se pensionan es igual para cada AFP. Las ecuaciones suponen que no se hacen contribuciones al fondo en la mitad de los períodos.

J_{RET} y $J_{RET\ SIST}$ Por simplicidad, se supone que un nuevo pensionado retira todos sus ahorros para contratar externamente una renta vitalicia. Para calcular este monto, se debe tener en cuenta el momento en que se aporta al fondo, y el retorno acumulado desde ese momento hasta el momento de pensionarse. Así, se lleva una contabilidad del retorno acumulado desde el aporte hasta el retiro, teniendo en cuenta la extemporalidad de los aportes:

$$J_{RET}(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_{APORT} J_{SAL}(t-i) \prod_{j=1}^i (1 + R_{PORT}(t-j+1))$$

$$J_{RET\ SIST}(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_{APORT} J_{SAL\ SIST}(t-i) \prod_{j=1}^i (1 + R_{SIST}(t-j+1)),$$

donde $\tau = J_{RETIRO} - J_{EDAD}$. Se supone que los aportantes inicialmente afiliados al fondo tienen la misma edad (J_{EDAD}), por lo que no es necesario precisar suposiciones con respecto al valor de las variables antes del tiempo $t = 0$.

I_{COM} , I_{RE} , e I_{TESOR} $\alpha_{COM} = 1,6\%$ es una constante que representa las comisiones retenidas por las AFP sobre las nuevas cotizaciones, y se obtiene promediando datos publicados por la Superintendencia Financiera (se excluye el monto necesario para el pago de las primas a FOGAFIN, que en promedio se aproximan a 0.2% del salario base de cotización). Para la comisión por el manejo de afiliados cesantes se usa la constante $\alpha_{COM\ CES} = 50\%/2 = 25\%$ a manera de aproximación de la fórmula definida para esta comisión, y se entiende este porcentaje como la proporción de comisión cobrada a cesantes sobre la cobrada a activos. Se tiene

$$I_{COM}(t) = \alpha_{COM} J_{SAL}(t-1) J_{AFIL}(t) (1 - \alpha_{CES} (1 - \alpha_{COM\ CES}))$$

$$I_{RE}(t) = R_{PORT}(t) K_{RE}(t-1)$$

$$I_{TESOR}(t) = R_{TESOR}(t) K_{TESOR}(t-1)$$

De la primera expresión se ve que las comisiones en el tiempo t forman parte del ingreso en el período $t \rightarrow t + 1$.

C_{PER} y J_{COST} Un análisis exhaustivo con regresiones lineales del costo de una AFP en personal e infraestructura, sobre distintos conjuntos de variables permite concluir que se puede usar como variable única el cambio en el tamaño del fondo. Esta regresión (ver Anexo C) arroja las ecuaciones

$$\begin{aligned}
C_{PER}(t) &= C_{PER}(t-1) + c_0(J_{TAM}(t-1)R_{PORT}(t) + J_{APORT}(t-1) \\
&\quad - J_{PENS}(t-1)J_{RET}(t-1)) \\
J_{COST}(t) &= J_{COST}(t-1) + c_0 S_{SIST}(J_{TAM} S_{SIST}(t-1)R_{SIST}(t) \\
&\quad + J_{AF} S_{SIST}(t-1)J_{SAL} S_{SIST}(t-1)\alpha_{APORT}(1 - \alpha_{CES}) \\
&\quad - J_{PENS}(t-1)J_{RET} S_{SIST}(t-1))
\end{aligned}$$

C_{PUBL} y C_{OTR} Un estudio panel sobre las AFP permite modelar estas variables como sigue:

$$\begin{aligned}
C_{PUBL}(t) &= (c_1 + d_1\varepsilon_1(t))K_{ING}(t-1) + (c_2 + d_2\varepsilon_2(t))J_{AFIL}(t-1) \\
&\quad + (c_3 + d_3\varepsilon_3(t))J_{TAM}(t-1) + (c_4 + d_4\varepsilon_4(t)) \\
C_{OTR}(t) &= (e_1 + f_1\phi_1(t))K_{ING}(t-1) + (e_2 + f_2\phi_2(t))J_{AFIL}(t-1) \\
&\quad + (e_3 + f_3\phi_3(t))J_{TAM}(t-1) + (e_4 + f_4\phi_4(t)),
\end{aligned}$$

donde las constantes c_i , d_i , e_i y f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) están listadas en el Anexo C, y ε_i , ϕ_i son variables normales estándar independientes. Una intuición menos clara de la naturaleza de estas variables motivan a usar la versión estocástica de todos los coeficientes.

C_{RM} Para calcular este costo potencial, se denota por F_0 el tamaño fondo al comienzo del trienio en cuestión, y se supone que no hay flujos de caja en la mitad de los períodos. El monto necesario para suplir una deficiencia con respecto a la rentabilidad mínima es

$$\begin{aligned}
C_{RM}(t) &= \text{máx} [0, F_0(1 + R_{RM}(t))^3 - F_0(1 + R_1(t))^3] \\
&= \text{máx} \left[0, F_0(R_{RM}(t) - R_1(t))((1 + R_{RM}(t))^2 \right. \\
&\quad \left. + (1 + R_{RM}(t))(1 + R_1(t)) + (1 + R_1(t))^2) \right] \\
&= \text{máx} \left[0, \frac{J_{TAM}(t)}{1 + R_1(t)}(R_{RM}(t) - R_1(t)) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{(1 + R_{RM}(t))^2}{(1 + R_1(t))^2} + \frac{1 + R_{RM}(t)}{1 + R_1(t)} + 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

C_{IMP} La tasa impositiva para las AFP se estima alrededor de $\alpha_{IMP} = 32\%$, considerando datos de pagos de impuestos y de ingresos y egresos suministrados por la Superintendencia Financiera. Con esto, se tiene

$$C_{IMP}(t) = \alpha_{IMP} (K_{ING}(t) - C_{PER}(t) - C_{PUBL}(t) - C_{OTR}(t) - C_{RM}(t))$$

K_{ING} y K_{COST} Estas variables se determinan con los ingresos y egresos calculados anteriormente:

$$\begin{aligned} K_{ING}(t) &= I_{COM}(t) + I_{RE}(t) + I_{TESOR}(t) \\ K_{COST}(t) &= C_{PER}(t) + C_{PUBL}(t) + C_{OTR}(t) + C_{RM}(t) + C_{IMP}(t). \end{aligned}$$

K_{RE} , K_{PAT} , K_{TESOR} y K_{DIV} Para este último conjunto de variables se establece una regla con la intención de precisar de una forma práctica la distribución de dividendos a accionistas de la AFP: en el momento en que no haya suficiente capital para cubrir la razón de solvencia, se “vende” la AFP a un precio igual al patrimonio, y una fracción (75%) del valor recibido se reparte como un dividendo final a los accionistas.¹⁶ Asimismo, se obliga a la AFP a permanecer constantemente con un patrimonio por encima de 2% del tamaño del fondo para evitar descapitalizaciones imprácticas e irreales. Cabe notar que si la AFP puede cubrir la razón de solvencia, entonces cumple automáticamente con la restricción de la Reserva de Estabilización, dados los límites inferiores para cada una, y el hecho de que no se puede tener más del 50% del fondo en deuda pública. Una vez se liquida la AFP, a todas las variables se les asigna un valor de 0 en períodos futuros. Finalmente, en el último período del horizonte de análisis, T , se asigna un dividendo igual al patrimonio en ese tiempo. Primero se definen dos variables auxiliares:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{PAT}(t) &= \beta_{VIVO}(t-1) (K_{PAT}(t-1) + K_{ING}(t) - K_{COST}(t)) \\ \beta_{VIVO}(0) &= 1, \quad \beta_{VIVO}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_{RS} \times J_{TAM}(t)(1 - w_{DP}) \geq \tilde{K}_{PAT}(t) \\ \beta_{VIVO}(t-1), & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁶Esta fracción pretende representar un costo de transacción que puede traer la urgencia de vender una compañía, y además penaliza estrategias que inicialmente reparten dividendos muy altos a riesgo de volver insolvente la AFP en el futuro. Otra alternativa posiblemente más realista es exigir a los accionistas poner más capital para suplir esta necesidad, pero ésta parece una solución menos práctica, y su valor agregado en términos de estrategias óptimas es dudoso.

Con esto, se pueden definir las variables deseadas tomando en cuenta la regla descrita.

$$\begin{aligned}
K_{RE}(t) &= \begin{cases} \beta_{VIVO}(t) * \text{mín} [RE(t) * J_{TAM}(t), \tilde{K}_{PAT}(t)], & \text{si } t < T \\ 0, & \text{si } t=T. \end{cases} \\
K_{DIV}(t) &= \begin{cases} \text{máx} [0, \tilde{K}_{PAT}(t)], & \text{si } t < T \text{ ó } \beta_{VIVO}(t-1) - \beta_{VIVO}(t) = 1 \\ DIV(t) * \beta_{VIVO}(t) * (\tilde{K}_{PAT}(t) - K_{RE}(t)), & \text{de lo contrario.} \end{cases} \\
K_{PAT} &= \beta_{VIVO}(t)(\tilde{K}_{PAT}(t) - K_{DIV}(t)) \\
K_{TESOR} &= \beta_{VIVO}(t)(\tilde{K}_{PAT}(t) - K_{RE}(t)).
\end{aligned}$$

3.4. Comportamiento de la AFP

Para terminar con la definición del modelo se debe determinar el objetivo de una AFP. Para esto, se supone que la AFP se comporta como un agente maximizador de su utilidad esperada; esta utilidad se construye de tal manera que solo dependa de los flujos de caja generados por el pago del capital inicial, y por el reparto de dividendos.¹⁷ Específicamente se resume esta información en la TIR de estos flujos de caja.¹⁸ Formalmente, la AFP debe resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&\text{máx } E [U (TIR(-K_{CAP}, K_{DIV}(1), \dots, K_{DIV}(T)))] \\
&\{w_{PORT}(t), w_{TESOR}(t), K_{DIV}(t), K_{RE}(t)\}
\end{aligned}$$

en donde la maximización está sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned}
&\text{Límites de inversión para } w_{PORT} \text{ y } w_{TESOR}, \\
&0\% \leq DIV \leq 100\%, \\
&(1 - w_{DP}(0))J_{TAM} \leq 48 \times K_{PAT}, \\
&1\% \leq RE \leq 100\%.
\end{aligned}$$

La dependencia temporal de las variables de control definen éste como un problema de control estocástico. Es decir, en cada período estas variables se encuentran usando la información disponible hasta ese momento, y maximizando la utilidad esperada de la TIR (que se calcula desde $t = 0$ hasta $t = T$; es decir, conociendo “parcialmente” la TIR).

¹⁷Se debe notar que el capital inicial K_{CAP} (en $t = 0$) se supone igual al patrimonio inicial de la AFP base, y además se permite el reparto de dividendos en $t = 0$, que equivale a aportar menos capital.

¹⁸Esta TIR está bien definida, ya que por construcción los dividendos repartidos nunca son negativos.

Por simplicidad, se trabaja con una función de utilidad con CARA constante¹⁹; es decir, se usa la siguiente forma funcional:

$$U(R) = -e^{-\theta R},$$

donde θ es el parámetro de aversión al riesgo del agente. Se observan dos puntos: primero, el efecto intertemporal está factorizado en el cálculo de la TIR; segundo, el agente optimizador es el accionista de la AFP (posiblemente mediante su junta directiva). Así, el consumo intertemporal de este agente se da mediante el reparto de dividendos. La escogencia de θ para la implementación del modelo se basa en la situación a enero de 2006 del sistema de fondos. Se escogen dos portafolios eficientes: el primero tiene el mismo retorno esperado que el sistema de los fondos, y el segundo tiene el mismo riesgo. Para cada portafolio se encuentra el valor de θ que debe tener un inversionista para que su portafolio óptimo sea precisamente el portafolio considerado. Este procedimiento arroja dos valores: $\theta = 5$ y 12 .²⁰ La figura 1 resume estos puntos dentro del contexto de la frontera eficiente.

4. Implementación del Modelo y Resultados

Tal como está el modelo, hay 24 variables de control no redundantes, que deben ser encontradas en términos de las variables de estado para cualquier período. Es claro que esta dimensionalidad en conjunto con la naturaleza estocástica del control requieren simplificaciones antes de proceder a implementar el modelo. Debido a esto, se presentan varias simplificaciones para proceder con el análisis. Primero, se trabaja con un período, suponiendo que no hay Rentabilidad Mínima. Segundo, se mantiene solo un período, pero el problema se generaliza; sin embargo, en este caso no se puede encontrar una solución analítica. Para poder proceder con la solución numérica, se hacen suposiciones fuertes sobre la naturaleza del portafolio de tesorería con el fin de reducir la dimensionalidad del problema.²¹ Por último, se extiende este esquema al caso de varios períodos. Dada la dimensionalidad del problema es

¹⁹Dado que el insumo de la función de utilidad es una tasa de retorno, se usa el coeficiente absoluto de aversión al riesgo, y no el relativo, que se usa normalmente cuando el insumo es el nivel de riqueza.

²⁰Una intuición acerca de la magnitud de estos números puede darse como sigue: un inversionista correspondiente a $\theta = 12$ es *indiferente* entre un retorno **seguro** de 5%, y un retorno incierto de 10% con 65% de probabilidad, y 0% con 35% de probabilidad. El inversionista correspondiente a $\theta = 5$ cambia estas probabilidades de indiferencia a 56% y 44%, reflejando así su menor aversión al riesgo.

²¹Esta etapa también puede interpretarse, dadas unas variables de estado inicialmente distintas a las del período 0, como la solución al problema del control estocástico

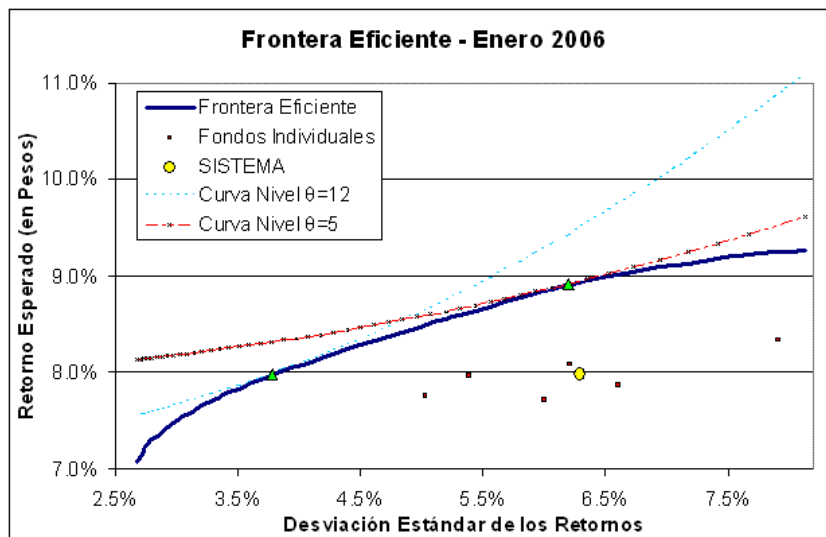


Figura 1: Frontera Eficiente y portafolios eficientes correspondientes a $\theta = 5$ y 12.

computacionalmente complejo (con la tecnología disponible en la actualidad) resolverlo en términos generales. Por esto, se simplifica suponiendo que las variables de control deben fijarse en el período 0. A pesar de esta fuerte simplificación, los resultados pueden ser tomados como una guía para entender el efecto de la regulación en el comportamiento de las AFP. Para esto, se variarán elementos regulatorios para mostrar su efecto sobre el portafolio de inversión del fondo de pensiones administrada por la AFP. Para simplificar el análisis de resultados, éste se hará representando los portafolios encontrados en el espacio media-varianza.

4.1. Un Período

4.1.1. Regulación Actual Excluyendo la Rentabilidad Mínima

Sea Q_0 el nivel de capital neto inicial:

$$Q_0 = K_{CAP} - \min(DIV(0) \times (K_{CAP} - RE \times J_{TAM}(0)), 0)$$

para el último período, que es el punto de arranque para resolver el problema general trabajando hacia atrás en el tiempo (con el esquema de “backward-induction”); este esquema es usado generalmente para resolver numéricamente problemas de control estocástico.

(es decir, el capital inicial menos el dividendo que se reparte inmediatamente). Si se denota por Q_1 el capital final de la AFP, entonces la TIR calculada por un periodo es $TIR = Q_1/Q_0 - 1$. Ahora, $Q_1 - Q_0 = \text{Ingresos} - \text{Egresos}$, donde estas variables son las incurridas durante el período de estudio. Luego $TIR = (\text{Ingresos} - \text{Egresos}) / Q_0$.

Según el modelo planteado en el capítulo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Ingresos} &= I_{COM}(1) + I_{RE}(1) + I_{TESOR}(1) \\ &= I_{COM}(1) + (K_{RE}(0)\mathbf{w}_{PORT} + (Q_0 - K_{RE}(0))\mathbf{w}_{TESOR}) \cdot \mathbf{r}(1), \end{aligned}$$

donde $K_{RE}(0) = \min(RE \times J_{TAM}(0), K_{CAP})$, e $I_{COM}(1)$ es conocida en $t = 0$. Asimismo, los egresos se representan con la ecuación

$$\text{Egresos} = (C_{PER}(1) + C_{PUBL}(1) + C_{OTR}(1))(1 - \alpha_{IMP}) + \alpha_{IMP} \times \text{Ingresos},$$

donde

$$\begin{aligned} C_{PER}(1) &= C_{PER}(0) + c_0(J_{APOR}(0) - J_{PENS}(0)J_{RET}(0) \\ &\quad + J_{TAM}(0)\mathbf{w}_{PORT} \cdot \mathbf{r}(1)) \\ C_{PUBL}(1) &= (c_1K_{ING}(0) + c_2J_{AFIL}(0) + c_3J_{TAM}(0) + c_4) \\ &\quad + (d_1K_{ING}(0)\varepsilon_1(1) + d_2J_{AFIL}(0)\varepsilon_2(1) \\ &\quad + c_3J_{TAM}(0)\varepsilon_3(1) + d_4\varepsilon_4(1)) \\ C_{OTR}(1) &= (e_1K_{ING}(0) + e_2J_{AFIL}(0) + e_3J_{TAM}(0) + e_4) + \\ &\quad (f_1K_{ING}(0)\phi_1(1) + f_2J_{AFIL}(0)\phi_2(1) \\ &\quad + f_3J_{TAM}(0)\phi_3(1) + f_4\phi_4(1)) \end{aligned}$$

En las últimas dos expresiones, las variables ε y ϕ son normales estándar independientes. Así, reemplazando estas expresiones en la ecuación

$$\begin{aligned} TIR &= \frac{1 - \alpha_{IMP}}{Q_0} (I_{COM}(1) + I_{RE}(1) + I_{TESOR}(1) \\ &\quad - C_{PER}(1) - C_{PUBL}(1) - C_{OTR}(1)), \end{aligned}$$

se puede simplificar la utilidad esperada como sigue, teniendo en cuenta que para una variable normal $X \sim \mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$,

$$E[e^{wX}] = e^{\omega\eta + \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}.$$

$$\begin{aligned} E[U(TIR)] &= -\exp\left\{\frac{\theta(1 - \alpha_{IMP})}{Q_0}(\gamma_1 - \Gamma\mathbf{w}_1\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta^2(1 - \alpha_{IMP})^2}{2Q_0^2}(\gamma_2 + \Gamma^2\mathbf{w}_1\Sigma\mathbf{w}_1^T)\right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -I_{COM}(1) + (c_1 + e_1)K_{ING}(0) + (c_2 + e_2)J_{AFIL}(0) \\
&\quad + (c_3 + e_3)J_{TAM}(0) + (c_4 + e_4) + C_{PER}(0) \\
&\quad + c_0(J_{APOR}(0) - J_{PENS}(0)J_{RET}(0)) \\
\gamma_2 &= (d_1^2 + f_1^2)K_{ING}(0)^2 + (d_2^2 + f_2^2)J_{AFIL}(0)^2 + (d_3^2 + f_3^2)J_{TAM}(0)^2 \\
&\quad + (d_4^2 + f_4^2) \\
\Gamma &= Q_0 - c_0J_{TAM}(0) \\
\lambda &= \frac{K_{RE}(0) - c_0J_{TAM}}{\Gamma}, \quad \mathbf{w}_1 = \lambda\mathbf{w}_{PORT} + (1 - \lambda)\mathbf{w}_{TESOR}.
\end{aligned}$$

El problema a resolver es el de encontrar las variables de control que maximizan la utilidad esperada. Si se fijan valores para DIV y RE , entonces el problema es equivalente a resolver

$$\max_{\mathbf{w}_1} \left(\Theta\mathbf{w}_1\mu - \frac{1}{2}\Theta^2\mathbf{w}_1\Sigma\mathbf{w}_1^T \right) \quad (4.1)$$

donde $\Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP})\frac{\Gamma}{Q_0}$. Dado que \mathbf{w}_1 es un promedio de \mathbf{w}_{PORT} y \mathbf{w}_{TESOR} , ponderado con pesos positivos²² que suman uno, debe satisfacer las mismas restricciones que están impuestas en estos portafolios. Más aún, la solución a (4.1) se da en el portafolio óptimo para un agente con función de utilidad U , y aversión al riesgo Θ . En particular, este portafolio, que se denomina \mathbf{w}_Θ^* , está sobre la frontera eficiente. El objetivo de la AFP se maximiza escogiendo \mathbf{w}_{PORT}^* y \mathbf{w}_{TESOR}^* de tal manera que

$$\lambda\mathbf{w}_{PORT}^* + (1 - \lambda)\mathbf{w}_{TESOR}^* = \mathbf{w}_\Theta^*.$$

En particular, esto puede lograrse escogiendo $\mathbf{w}_{PORT}^* = \mathbf{w}_{TESOR}^* = \mathbf{w}_\Theta^*$.²³ Dado que $\Theta < \theta$, el portafolio óptimo para una AFP, para el caso de un período y la ausencia de la Rentabilidad Mínima, es el portafolio eficiente que escogería un agente con menor aversión al riesgo que la AFP. Esta disminución de la aversión al riesgo revelada se atribuye al impacto suavizador de los impuestos y a la dependencia de los costos (el de personal e infraestructura más específicamente) sobre el incremento en el tamaño del fondo, lo cual hace decrecer el beneficio que la AFP deriva por buenos retornos en el fondo. Debe recordarse que estas preferencias, y en particular esta aversión al riesgo, son independientes de las preferencias y aversión al riesgo de los afiliados al sistema cuyos ahorros conforman el fondo de pensiones.

²² $c_0 < 1\% \Rightarrow \lambda > 0$ (ver Apéndice C). $Q_0 \geq K_{RE}(0) \Rightarrow \lambda \leq 1$.

²³Puede haber otras soluciones, que darían la misma función objetivo. Se escoge esta por simplicidad.

El portafolio final depende del valor óptimo de Θ (que depende de Q_0 , que a su vez depende de DIV y RE). Si se fija un portafolio eficiente \mathbf{w}_1 , la expresión (4.1) es cuadrática en Θ , y alcanza su máximo en $\Theta^* = \frac{\mathbf{w}_1 \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{w}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_1^T}$. Para los datos usados, el mínimo valor de Θ^* es 14.0 (se da en el portafolio eficiente de más riesgo). Dado que $\Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP}) \frac{\Gamma}{Q_0} < 8,5$ para los datos considerados en el modelo, (4.1) es creciente en Θ para cada \mathbf{w}_1 , en el rango permitido para Θ . Luego la solución de la optimización se da en el valor máximo posible de Θ (que se denomina $\hat{\Theta}$), y en el portafolio eficiente correspondiente a esta aversión al riesgo (es decir, el portafolio que escogería un inversionista con aversión al riesgo $\hat{\Theta}$). Finalmente, el valor máximo de Θ se da cuando Q_0 adquiere su valor máximo. Es decir, cuando $Q_0 = K_{CAP}$. Esto se logra si no se reparten dividendos en el tiempo 0 ($DIV^* = 0$). El valor de RE se vuelve irrelevante ante esta solución (dado que los portafolios de tesorería y de inversión del fondo son iguales, RE no juega papel de importancia en el análisis).

En conclusión, ante la ausencia de Rentabilidad Mínima, la AFP maximiza su utilidad esperada usando $DIV = 0$ y escogiendo un portafolio de inversión eficiente, equivalente al portafolio óptimo para un inversionista con aversión al riesgo

$$\Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP}) \left(1 - \frac{c_o J_{TAM}(0)}{K_{CAP}} \right),$$

donde θ es la aversión al riesgo de la AFP. Debe notarse que el portafolio eficiente escogido por la AFP puede desviarse considerablemente del portafolio preferido por el afiliado si éste es más averso al riesgo que la AFP.

La figura 2 muestra los portafolios óptimos de escogencia para las AFP, con los datos usados a lo largo del análisis, en el plano media-varianza. Se contrastan contra los portafolios “eficientes”; estos son los portafolios que escogería un inversionista racional con igual aversión al riesgo que la AFP.

4.1.2. Un Período, Incluyendo Rentabilidad Mínima

El montaje anterior se preserva, y se debe adicionar el costo de la Rentabilidad Mínima. Por simplicidad de exposición se hace una aproximación de primer orden para el retorno compuesto. Usando la notación de la Sección

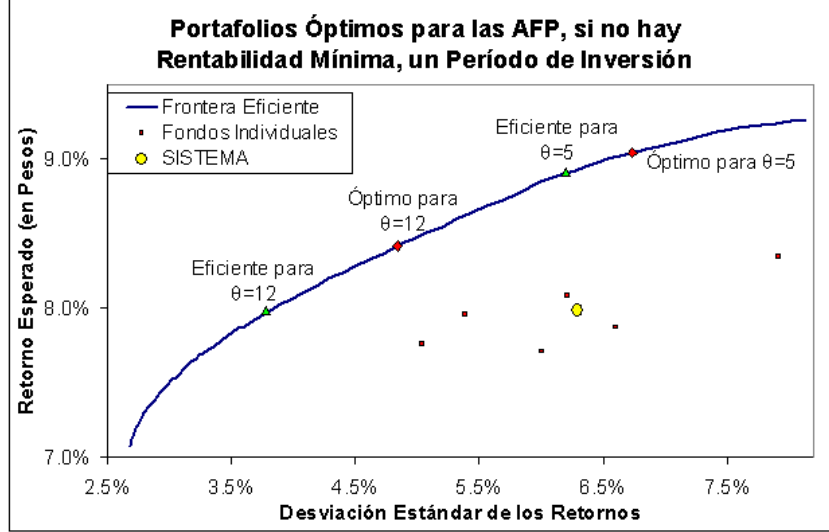


Figura 2: Portafolios óptimos para $\theta = 5$ y 12 .

3.3,

$$\begin{aligned}
C_{RM}(1) &= \text{máx} [0, F_0 ((1 + R_{RM}(1))^3 - (1 + R_1(1))^3)] \\
&\simeq \text{máx} [0, F_0 (R_2(1) - R_{PORT}(1) \\
&\quad + R_2(0) - R_{PORT}(0) + R_2(-1) - R_{PORT}(-1))] \\
&= \text{máx} [0, F_0 (\alpha_R \times (\alpha_P R_{SIST}(1) + (1 - \alpha_P) R_{PR}(1)) \\
&\quad - R_{PORT}(1) + K)],
\end{aligned}$$

donde F_0 es el tamaño del fondo dos períodos atrás, y K resume el exceso de la rentabilidad mínima en los últimos dos períodos sobre la rentabilidad del fondo. Usando las variables definidas en la sección 4.1.1, se desarrolla

$$\begin{aligned}
E[U(TIR)] &= -\exp \left\{ \frac{\theta(1 - \alpha_{IMP})}{Q_0} \gamma_1 + \frac{\theta^2(1 - \alpha_{IMP})^2}{2Q_0^2} \gamma_2 \right\} * \\
&E \left[\exp \left(\frac{-\theta(1 - \alpha_{IMP})}{Q_0} (\Gamma \mathbf{w}_1 \mathbf{r}(1) - F_0 \text{máx}(0, K + \mathbf{w}_2 \mathbf{r}(1))) \right) \right],
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{w}_2 = \alpha_R \alpha_P \mathbf{w}_{SIST} + \alpha_R (1 - \alpha_P) \mathbf{w}_{PR} - \mathbf{w}_{PORT}$, y $\mathbf{r}(1)$ es el vector de retornos de los activos. Si la dimensión de $\mathbf{r}(1)$ fuera 1, esta expresión podría resolverse analíticamente en términos de la distribución acumulada normal.

En varias dimensiones, la solución analítica se ve sacrificada por expresiones que involucran integrales de la distribución normal acumulada, que no es soluble analíticamente. Con esto, se procede a encontrar el valor de w_{PORT} que logra este máximo, de manera numérica. Para simplificar la dimensionalidad del problema se adopta la suposición adicional de que el portafolio de tesorería de la AFP es un portafolio eficiente con bajo riesgo, para reflejar la necesidad de liquidez que la AFP puede tener con este portafolio.

Dada la dimensionalidad del problema, se implementa un algoritmo genético dentro de un esquema de simulación para encontrar la solución a este problema: se simulan 10,000 posibles trayectorias (para los retornos y demás variables aleatorias del modelo), para determinar, dados los parámetros, la utilidad esperada. Luego el algoritmo genético (20,000 generaciones, 29 raíces aleatorias y una semilla) se usa para encontrar los parámetros que optimizan esta utilidad esperada.²⁴ Manteniendo la notación de la sección 2.4, se corren seis escenarios para dos niveles de aversión al riesgo ($\theta = 5$ y $\theta = 12$):

- **Caso base:** regulación actual.
- **100 % RM, Solo PR:** la Rentabilidad Mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times [\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR}]$, y todo lo demás permanece igual.
- **RM actual, PR eficiente:** todo permanece igual, excepto que se usa un portafolio eficiente como Portafolio de Referencia para el cálculo de la Rentabilidad Mínima.²⁵
- **100 % RM:** la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times \frac{1}{2}[R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})]$, y todo lo demás permanece igual.
- **100 % RM, Solo SIST:** la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times R_S$, y todo lo demás permanece igual.
- **Comisión Variable:** se cambia el sistema actual de comisiones, y se reemplaza por uno en que las AFP cobran como comisión el 15 % de los rendimientos de las cuentas individuales, en caso de ser positivos, y cero si los rendimientos son negativos.
- **R_E=2.5 %, RM con 40 %:** se exige que la AFP sea dueña de 2.5 % del fondo mediante la Reserva de Estabilización, y se relaja la

²⁴Una “corrida” del modelo con estas especificaciones dura alrededor de 1.5 horas. Sin embargo, una convergencia razonable se da normalmente dentro de las primeras 500 generaciones.

²⁵Se usa un portafolio eficiente que está casi en la mitad entre los que escogerían inversionistas con aversión al riesgo $\theta = 5$ y 12.

Rentabilidad Mínima para ser calculada mediante la fórmula $RM = 40\% \times \frac{1}{2}[R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})]$.

Cada escenario se corre cinco veces, partiendo de distintas semillas. Los resultados de cada corrida son los portafolios, el nivel de dividendos y el monto a dejar en la Reserva de Estabilización para la AFP modelada. Los resultados completos se exhiben en el Apéndice D; a continuación se muestran los resultados, representando los portafolios óptimos para cada caso en el espacio media-varianza para reducir la dimensionalidad, y facilitar comparaciones, y simultáneamente se grafican la frontera eficiente, los portafolios de los fondos de pensiones, el Portafolio de Referencia, el portafolio del sistema, y los portafolios que escogerían inversionistas con aversión al riesgo $\theta = 5$, y $\theta = 12$.

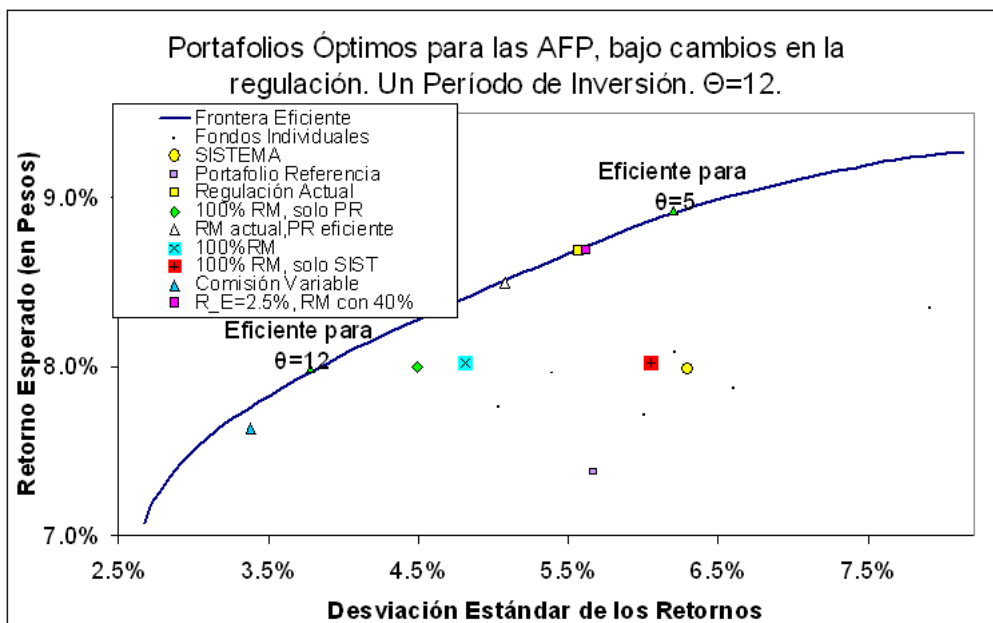


Figura 3: Portafolios óptimos para Distintas Regulaciones, $\theta = 12$.

De la figura 3 se puede observar que el portafolio óptimo (el que debería escoger una AFP según el modelo de su entorno) es uno eficiente. Así, en el caso de un período, la Rentabilidad Mínima actual no parece perjudicar

la eficiencia de los fondos. Es importante notar que la Rentabilidad Mínima es trianual. Luego al considerar la situación a enero 2006 de los fondos, era bastante poco probable que en un solo período violaran este mínimo. Combinando esto con el capital que la AFP tiene en la Reserva de Estabilización, es razonable entender que lo óptimo es invertir el fondo en un portafolio eficiente. Al cambiar la especificación de la Rentabilidad Mínima se observan cambios en lo que sería el comportamiento óptimo: al usar una Rentabilidad Mínima con un multiplicador de 100 % (a cambio de 70 %) - es decir, más cercana a la existente antes de 2004 - se sacrifica eficiencia en el fondo. Llevando el ejemplo más lejos, si se define la Rentabilidad Mínima ignorando el Portafolio de Referencia y manteniendo el multiplicador de 100 %, lo óptimo para el fondo estudiado es imitar cercanamente el perfil de riesgo-retorno del sistema de fondos. Es decir, en casos extremos el modelo permite concluir que AFPs racionales deberían replicar con su fondo administrado el portafolio del sistema de los fondos. Finalmente, en el caso en que se reemplaza el esquema actual de comisiones por uno de comisión totalmente variable dependiente del rendimiento del fondo, la AFP maximizaría su utilidad escogiendo un portafolio muy cercano a la frontera eficiente, pero con un nivel de riesgo mucho menor que los demás portafolios resultantes del ejercicio. La interpretación de este hecho se desprende de observar que si la AFP toma riesgos altos (así sean eficientes), incrementa la probabilidad de no cobrar comisión (es decir, de presentar pérdidas en el fondo administrado). Con portafolios menos riesgosos se asegura una comisión mucho más estable, y más de acuerdo con la operación preferida por una AFP aversa al riesgo. Es importante notar que en este caso se motiva a la AFP a invertir en portafolios eficientes. Para el caso en que se obliga a la AFP a tener un porcentaje más amplio en la Reserva de Estabilización, el portafolio óptimo es uno eficiente con un nivel de riesgo alto. Es decir, se corrobora la intuición de que alinear los incentivos de las AFP y sus afiliados más explícitamente sería beneficiosos para la eficiencia de los ahorros.

La figura 4 analiza una AFP menos aversa al riesgo. Este cambio es evidente en la forma en que los portafolios óptimos bajo distintas regulaciones tienden a moverse hacia la derecha; es decir, hacia portafolios más riesgosos.

4.2. Múltiples Períodos

Se procede igual que en la sección anterior, con la diferencia de que se establece un horizonte de $T = 5$ años. Una vez más, los resultados completos se exhiben en el Apéndice D, y por simplicidad de interpretación se grafican los resultados en el espacio media-varianza nuevamente. Asimismo, se repite el análisis con dos niveles de aversión al riesgo: $\theta = 5$, y $\theta = 12$. Se repite

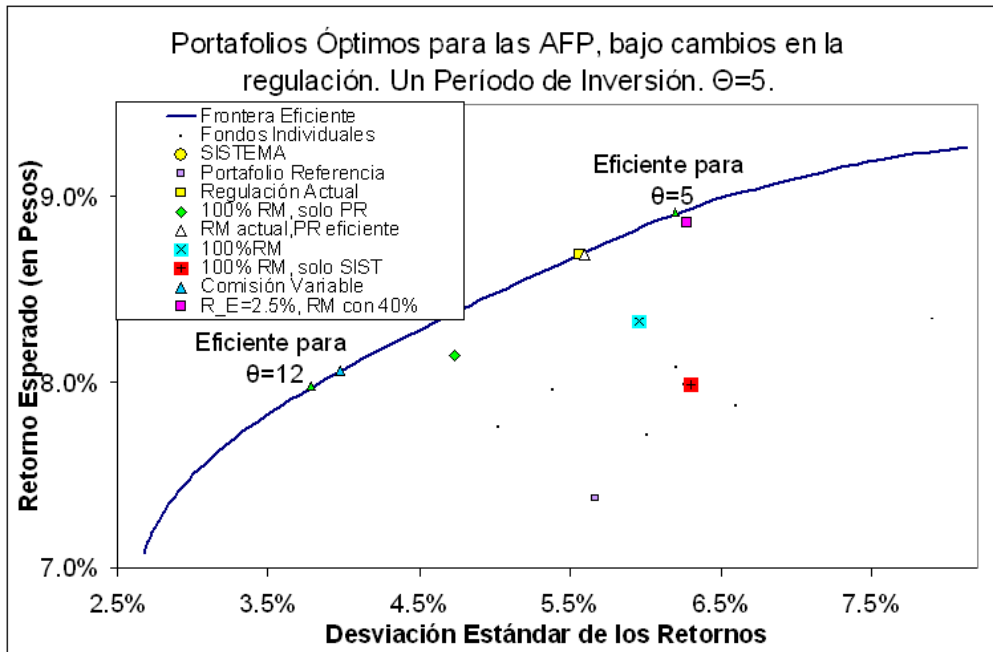


Figura 4: Portafolios óptimos para Distintas Regulaciones, $\theta = 5$.

el esquema de 10,000 simulaciones para cada conjunto de parámetros (los pesos del portafolio, el porcentaje de repartición de dividendos y el nivel porcentual de la Reserva de Estabilización), encontrando para cada conjunto la utilidad esperada de la AFP. Luego se maximiza esta utilidad esperada mediante un algoritmo genético con 2,000 generaciones, 29 raíces aleatorias y una semilla. Esto se repite para cinco semillas principales diferentes, con el objeto de ayudar al algoritmo a encontrar óptimos globales.²⁶ Es de notar que la complejidad numérica no permite garantizar convergencia; más aún, en varias situaciones se encontraron parámetros bastante distintos que ofrecían valores similares para la función objetivo a maximizar.

Los resultados mostrados corresponden al máximo absoluto encontrado en cada regulación modelada, pero debe tomarse esto como una aproximación a la solución exacta. Siguiendo el esquema adoptado para el caso de un período,

²⁶La maximización para una semilla demora alrededor de doce horas, por lo cual se requiere alrededor de dos días y medio para determinar un portafolio óptimo con este esquema.

se corre el modelo para los siguientes cambios en la regulación:

- **Caso base:** regulación actual.
- **100 % RM, Solo PR:** la Rentabilidad Mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times [\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR}]$, y todo lo demás permanece igual.
- **RM actual, PR eficiente:** todo permanece igual, excepto que se usa un portafolio eficiente como Portafolio de Referencia para el cálculo de la Rentabilidad Mínima.²⁷
- **100 % RM:** la Rentabilidad Mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times \frac{1}{2}[R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})]$, y todo lo demás permanece igual.
- **100 % RM, Solo SIST:** la Rentabilidad Mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times R_S$, y todo lo demás permanece igual.
- **Comisión Variable:** se cambia el sistema actual de comisiones, y se reemplaza por uno en que las AFP cobran como comisión el 15 % de los rendimientos de las cuentas individuales, en caso de ser positivos, y cero si los rendimientos son negativos.
- **Sin RM:** se elimina la Rentabilidad Mínima.
- **R_E=2.5 %, RM con 40 %:** se exige que la AFP sea dueña de 2.5 % del fondo mediante la Reserva de Estabilización, y se relaja la Rentabilidad Mínima para ser calculada mediante la fórmula $RM = 40\% \times \frac{1}{2}[R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})]$.

En la figura 5 se observa que al excluir la restricción de Rentabilidad Mínima de la regulación traería como comportamiento óptimo de la AFP invertir en un portafolio eficiente. Asimismo, se puede observar diferencias con respecto al caso de un período. Por ejemplo, el modelo indica que bajo la regulación actual, el portafolio óptimo para la AFP no es uno eficiente, como ocurría antes. La explicación se da en la naturaleza trianual de este cálculo. En el caso de un período se tomaron dos años anteriores fijos, en donde el fondo había superado fácilmente la Rentabilidad Mínima, dejando poco riesgo de quedar por debajo en el acumulado trianual después del siguiente año. En el caso actual, la Rentabilidad Mínima es más importante: hay más riesgo de violarla, dado que se mira cinco años adelante. Si se lleva la Rentabilidad Mínima a extremos, en donde se incrementa el mutliplicador de 70 % a 100 % (cerca a donde se encontraba hasta comienzos del 2004 - ver el Apéndice A),

²⁷Se usa un portafolio eficiente que está casi en la mitad entre los que escogerían inversionistas con aversión al riesgo $\theta = 5$ y 12.

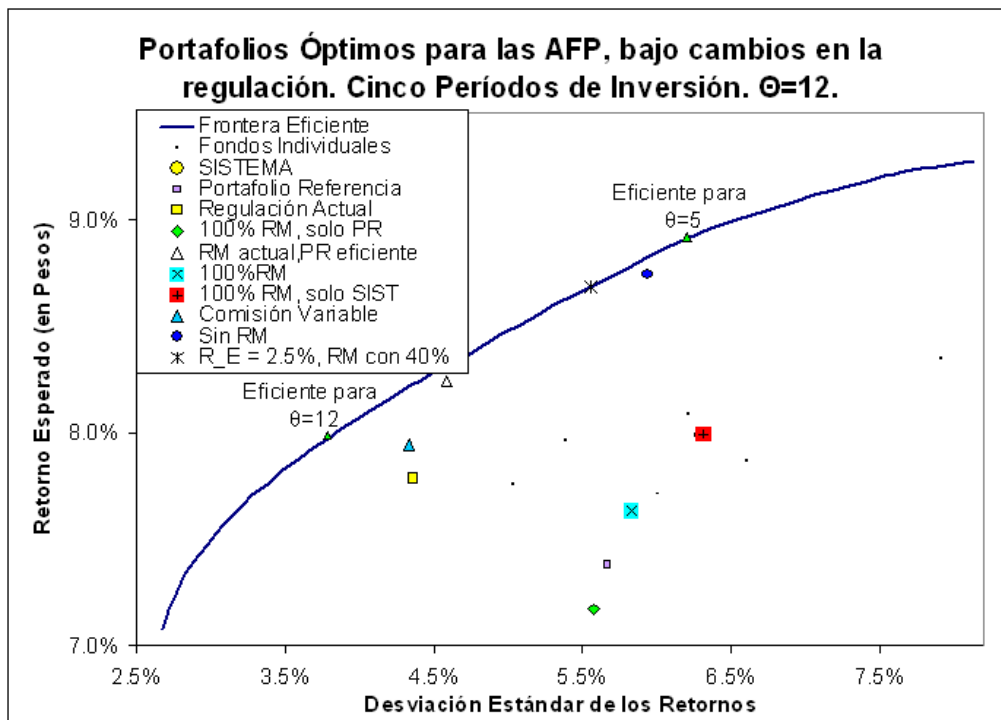


Figura 5: Portafolios óptimos para Distintas Regulaciones, $\theta = 12$.

se observan los siguientes comportamientos óptimos de la AFP: en el caso en que se elimina el Portafolio de Referencia, lo óptimo es imitar el perfil de riesgo-retorno del sistema; en el caso en que se elimina el sistema del cálculo, lo óptimo es acercarse al perfil del Portafolio de Referencia; en el caso en que se promedia el sistema con el Portafolio de Referencia, lo óptimo es acercarse a un punto medio. Es decir, este modelo evidencia que en el extremo la Rentabilidad Mínima incentiva a las AFP a imitar el portafolio de definición de ésta. Además de generar un efecto manada posiblemente indeseado, esto puede ocasionar, como parece verse en la práctica, equilibrios ineficientes por parte de los fondos. Es decir, las AFP se comportan racionalmente y optimizan sus utilidades alejándose de la frontera eficiente, acércandose al portafolio del sistema y al Portafolio de Referencia. Es razonable estudiar el efecto de cambiar el Portafolio de Referencia por uno eficiente, y en la figura se nota que el modelo sugiere que las AFP deberían acercarse a la frontera eficiente. Igualmente, un cambio en el esquema de comisiones que permita a las AFP cobrar una porción del rendimiento del fondo ayudaría a incre-

mentar la eficiencia del portafolio óptimo de inversión. Esto se logra con una disminución simultánea del riesgo, que se puede explicar considerando que una AFP no desea tomar riesgos en las comisiones cobradas, y desea tener estabilidad en estos cobros. Finalmente, una regulación con una restricción más alta en el monto a ser dejado en la Reserva de Estabilización - combinada con una restricción de Rentabilidad Mínima más relajada - tiene como resultado óptimo para la AFP un portafolio eficiente. Es decir, se corrobora el efecto intuitivamente positivo que debe tener un fuerte alineamiento entre los incentivos y riesgos tomados por la AFP y sus afiliados.

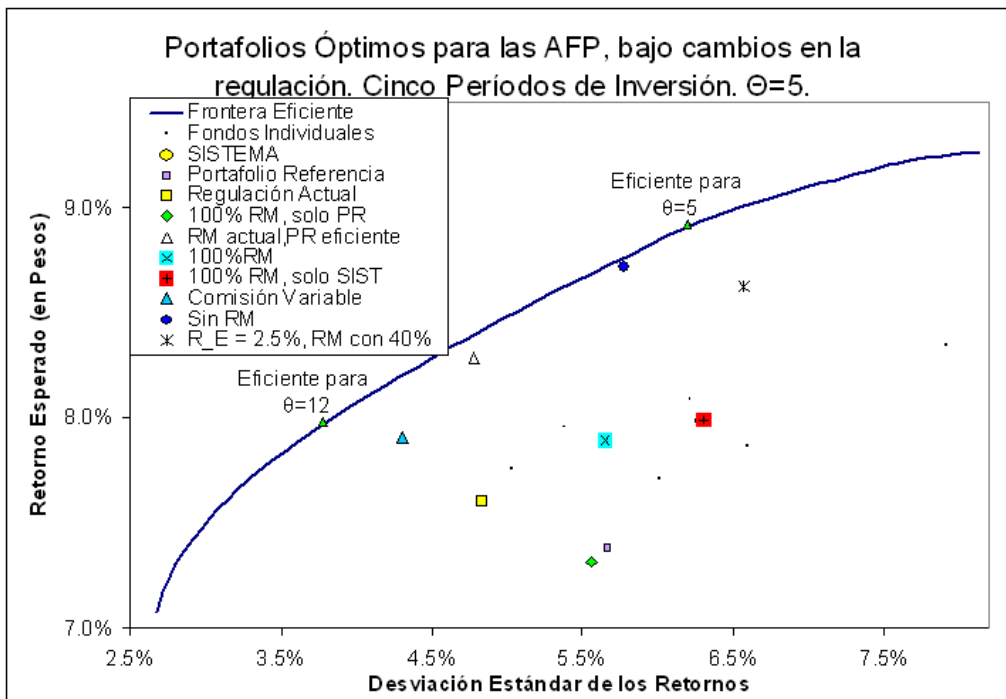


Figura 6: Portafolios óptimos para Distintas Regulaciones, $\theta = 5$.

La figura 6 muestra los resultados para una aversión al riesgo menor. Los resultados son similares a los descritos en el párrafo anterior. Como es de esperarse, los portafolios óptimos bajo distintas regulaciones tienden a moverse a puntos de mayor riesgo.

5. Conclusiones

Modelar un fondo de pensiones incorporando su entorno de regulación y de mercado puede permitir analizar cuál debe ser el comportamiento óptimo en términos del portafolio de inversión del fondo; más aún, puede permitir observar cambios en este comportamiento óptimo para cambios en la regulación de los fondos. Es importante notar que los supuestos necesarios para poder definir tal modelo, en adición a la falta de evidencia empírica que permita validar el modelo, y a la complejidad numérica causada por la dimensionalidad de los portafolios (que causan optimizaciones matemáticas de muy lenta o incierta convergencia), inhiben presentar conclusiones numéricas precisas. Es decir, no se puede pretender determinar de manera exacta el comportamiento óptimo que debería tener una AFP. Sin embargo, se pueden observar tendencias y diferencias en los comportamientos óptimos determinados por el modelo para obtener señales de posibles consecuencias de la regulación en el comportamiento de los fondos.

En este estudio se presenta un modelo en el que se incluyen los puntos de la regulación relevantes para la determinación del portafolio de los fondos de pensiones. La evolución de algunas variables tales como ciertos costos, cuya relación con otras variables no es exactamente establecida, se determina mediante regresiones lineales. Finalmente, se introduce en el modelo un agente que representa un fondo de pensiones pequeño, para poder suponer que sus acciones no afectan el comportamiento del sistema. Los datos iniciales de información de este fondo modelo, y los parámetros que permiten definir éste como un modelo dinámico, son basados en su totalidad en información disponible en la página de la Superintendencia Financiera.

Reiterando la imposibilidad de validar empíricamente los resultados obtenidos y teniendo en cuenta la dificultad de obtener resultados irrefutables dada la dimensionalidad del problema, se listan a continuación las conclusiones derivadas de este modelo:

- La regulación actual puede explicar las inversiones ineficientes de los fondos de pensiones. El modelo en general indica que el portafolio óptimo para una AFP tiene un perfil de retorno esperado similar a lo observado en los fondos de pensiones, pero un perfil de riesgo algo menor (sin llegar a la frontera eficiente).
- Si a la regulación actual se le omitiera la restricción de la Rentabilidad Mínima, las AFP optimizarían su utilidad esperada invirtiendo en un portafolio eficiente.
- La definición de la Rentabilidad Mínima determina un atractor: mien-

tras más estricto sea el factor multiplicador (en la actualidad, 70 %), más se acerca el portafolio óptimo para la AFP al portafolio que defina la Rentabilidad Mínima (en la actualidad, el promedio del portafolio del sistema y el Portafolio de Referencia definido por la Superintendencia Financiera) en términos del perfil de riesgo-retorno. Dado que este factor fue reducido en el 2004 de 90 % a 70 %, es posible pensar que hasta ese momento el sistema fue atraído por el perfil del Portafolio de Referencia (claramente ineficiente) hacia un equilibrio ineficiente, y que la reducción hecha en el 2004 puede ayudar a alejarlo nuevamente. Sin embargo, es razonable pensar que este alejamiento, si ocurre, tomará tiempo en materializarse.

- Para horizontes de inversión mayores, las AFP tienen más riesgo de violar la Rentabilidad Mínima, y por lo tanto ésta se vuelve más relevante. En el caso de un período, en donde se suponen dados dos años anteriores de buenas rentabilidades para el fondo estudiado, la Rentabilidad Mínima deja de ser relevante para el comportamiento de la AFP.
- Si el Portafolio de Referencia se define como un portafolio eficiente, mejoraría la eficiencia del fondo analizado, suponiendo que éste desea optimizar su utilidad esperada.
- Introducir un esquema de comisión variable que dependa del rendimiento del fondo mejoraría la eficiencia de los fondos, causando simultáneamente una disminución notable en el riesgo tomado por los portafolios.
- Alinear los incentivos de las AFP con los de sus afiliados mediante un incremento al porcentaje mínimo de la Reserva de Estabilización ayudaría fuertemente a mejorar la eficiencia de los fondos.

Referencias

- [1] Arango, L. E. y L. F. Melo [2006]. Determinantes de la elección de administradora de pensiones: primeras estimaciones a partir de agregados. *Borradores de Economía, Banco de la República*. No. 383, Marzo 2006.
- [2] Ayala, U. y O. L. Acosta [2002]. Políticas para promover una Ampliación de la Cobertura del Sistema de Pensiones en Colombia. *Publicación de las Naciones Unidas*. Abril 2002.
- [3] Circular Básica Jurídica. Superintendencia Financiera de Colombia.

- [4] Devesa-Carpio, J. E. y C. Vidal-Meliá [2002]. The Reformed Pension Systems in Latin America. *Social Protection Discussion Paper Series No. 0209*. The World Bank.
- [5] Ley 100 de 1993 y sus respectivas modificaciones. “Sistema de Seguridad Social Integral”. Diciembre, 1993.
- [6] Gómez, C, Jara, D., y A. Pardo [2005]. Análisis de eficiencia de los portafolio pensionales obligatorios en Colombia. Ensayos sobre Política Económica, Banco de la República. Diciembre, 2005.
- [7] Shah, H. [1997]. Towards Better Regulation of Private Pension Funds. *Informe para el Banco Mundial*. Abril 1997.
- [8] Solís-Soberón, F. [1999]. The Regulation of Investments in Latin American Defined Contribution Public Pension Schemes. *Informe para CONSAR*. Noviembre 1999.
- [9] Srinivas, P. S., Whitehouse, E. y J. Yermo [2000]. Regulating Private Pension Funds’ Structure, Performance and Investment: Cross-country Evidence. *Social Protection Discussion Paper Series No. 0113*. The World Bank.
- [10] Suescún, R. [2001]. Regulación de los Fondos Privados de Pensiones. *Informe para el Ministerio de Hacienda de Colombia*. Mayo 2001.

A. Evolución de la Rentabilidad Mínima

El Artículo 101 de la Ley 100 de 1993 obliga a las AFP a garantizar un rendimiento mínimo a sus afiliados. Esta cota es determinada trimestralmente mediante una fórmula definida por la Superintendencia Financiera. A continuación se muestra la evolución histórica de esta fórmula.

1. En el decreto #740 de 1994 se define la rentabilidad mínima como

$$RM = 90\% \times \alpha R_E + 97,5\% \times (1 - \alpha) R_{NE}, \text{ donde}$$

- R_E es el retorno promedio (ponderado por nivel de capitalización de las 20 acciones más transadas) en el mercado accionario colombiano.
- R_{NE} es la tasa promedio de colocación de bonos recientemente emitidos por el gobierno colombiano, el Banco de la República, entidades del estado, algunas entidades comerciales, y CDTs de establecimientos de crédito, ponderada por montos en circulación.

- α es el porcentaje del fondo invertido en renta variable.

Se debe notar que α variaba con cada AFP. Por lo tanto, la Rentabilidad Mínima no era uniforme: existía la posibilidad de que para dos fondos, A y B, A tuviera un mejor rendimiento que B, pero A fallara en cumplir con la Rentabilidad Mínima, mientras que B cumpliera con ella. También se debe notar que R_{NE} no representa un retorno, sino un promedio de tasas de colocación. Finalmente, el resultado de la fórmula era difundida al final de cada año, tomando en cuenta los rendimientos desde el comienzo del año hasta dos semanas antes del fin del año.

2. Con el decreto #1141 de 1995, la Rentabilidad Mínima se define más cercanamente al espíritu de la definición chilena:

$$RM = \frac{1}{2} (90\%R_P + (90\% \times \alpha R_E + 95\% \times (1 - \alpha)R_{NE})), \text{ donde}$$

- R_P es el retorno promedio del sistema de los fondos de pensiones, ponderado por el tamaño de cada uno (sin que este porcentaje sobrepase el 20% del sistema).
- R_E es el retorno promedio de las tres bolsas accionarias del país, ponderado por el volumen transado en cada una.
- R_{NE} es el rendimiento de un portafolio de referencia compuesto por deuda gubernamental, CDTs, y deuda corporativa.
- α es el porcentaje del fondo invertido en renta variable.

La verificación de esta Rentabilidad Mínima se estableció con frecuencia trimestral, sobre rendimientos bianuales.

3. El decreto #806 de 1996 presentó solo dos cambios: se limitó α inferiormente con 5%. Este cambio se hizo con la intención de promover el desarrollo del mercado accionario colombiano. El otro cambio fue el de establecer las mediciones trimestrales sobre rendimientos trianuales.
4. El decreto #1592 de 2004 redujo el multiplicador fraccionario de la fórmula (volviéndolo uniforme e igual a 70%), eliminó el piso de 5% a la exposición de los portafolios en renta variable, e introdujo una medición al porcentaje invertido en renta variable externa:

$$RM = 70\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})], \text{ donde}$$

- R_S es el retorno promedio del sistema de los fondos de pensiones, ponderado por el tamaño de los fondos (acotado superiormente por 20%).

- R_{RVL} es el retorno del índice accionario IGBC.
- R_{RVE} es el retorno (en pesos) del índice accionario S&P 500.
- R_{PR} es el retorno del portafolio de referencia, definido por la Superintendencia Financiera, y conformado en su mayoría por deuda pública interna, CDTs y títulos comerciales.
- α es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en acciones locales.
- β es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en renta variable externa.

La figura 7 muestra la Rentabilidad trianual de los fondos comparada con la Rentabilidad Mínima.

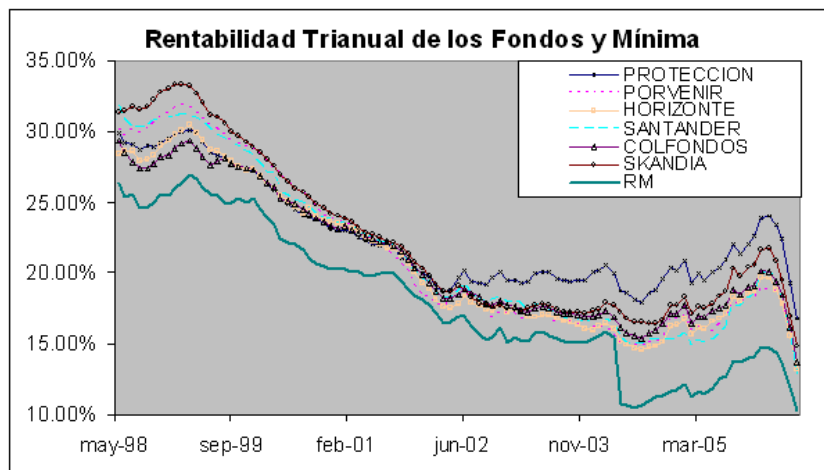


Figura 7: Rentabilidad trianual de los fondos contra la Rentabilidad Mínima.
Fuente: Superintendencia Financiera.

B. Datos de Retornos

Las fuentes utilizadas para obtener datos de retornos históricos de distintos tipos de activos se resumen en la tabla 3. Los datos usados abarcan el

Familia de Activos	Activo	Fuente
TCP (TES Corto Plazo)	Indice de TES de CP	AFP Porvenir
TCP (TES Largo Plazo)	Indice de TES de LP	AFP Porvenir
TUVR (TES UVR)	Indice de TES UVR	AFP Porvenir
BCC (Bonos Privados)	Indice de Bonos IPC	AFP Porvenir
RVL (Acciones Colombia)	Indice IGBC	B (IGBC <Index>)
YANK (Deuda Externa Colombia)	Indice EMBI Colombia	B (JPEGCO <Index>)
DGD (Deuda Desarrollados)	Indice Deuda Española Indice Deuda Japonesa Indice Deuda Británica Indice Deuda Alemana Indice Deuda EE. UU.	LB (Global: Spain) LB (Global: Japan) LB (Global: UK) LB (Global: Germany) LB (U.S. Treasury)
DEGE (Deuda Externa Emergentes)	Indice EMBI Bulgaria Indice EMBI Chile Indice EMBI Hungría Indice EMBI Malasia Indice EMBI México Indice EMBI Polonia Indice EMBI Rusia Indice EMBI Sur Africa Indice EMBI Tailandia	B (JPEGBG <Index>) B (JPEGCH <Index>) B (JPEGHU <Index>) B (JPEGMA <Index>) B (JPEGMX <Index>) B (JPEGPL <Index>) B (JPEGRUS <Index>) B (JPEGSAF <Index>) B (JPEGTH <Index>)
DIGE (Deuda Interna Emergentes)	Indice EMBI R. Checa Indice EMBI Polonia Indice EMBI Sur Africa	B (JPMT CZ <Index>) B (JPENPDUL <Index>) B (JPMTSAF <Index>)
DCE (Deuda Corporativa Externa)	Indice EE.UU Indice Europa Indice Japón	LB (U.S. Corp. Inv. Grade) LB (European Corporate) LB (Japanese Corporate)
RVE (Acciones Externas)	Indice S&P EE.UU Indice Europa Indice Asia Ex-Japón	B (ISPIX US <Index>) B (IEV US <Index>) B (MXAPJ <Index>)

Tabla 3: Fuentes de Retornos por Tipo de Activos. B=Bloomberg, LB=Lehman Brothers.

período enero 2001 - enero 2006, y se usó frecuencia semanal de retornos de los índices para la construcción de la matriz de varianza-covarianza.

Para el análisis de retornos esperados, se toman bonos de los emisores considerados con madurez cercana a un año de Bloomberg, excepto para el caso de deuda corporativa colombiana, cuyos datos se obtienen de la Bolsa

de Valores de Colombia.

C. Análisis de Datos de las AFP en Colombia

C.1. Fuente y Cálculos

La página Web de la Superintendencia Financiera ofrece información financiera, contable y estadística de los fondos de pensiones. En particular, la siguiente fue la información usada en el presente trabajo:

- Estados Financieros de las AFP: hoja de balance y PyG de las administradoras.
- Estados Financieros de los fondos de pensiones: hoja de balance y PyG de los fondos administrados.
- Reporte de Valor de los Fondos: información de saldo, recaudos, rendimientos abonados, traslados, mesadas pensionales, y comisiones cobradas.
- Reporte de Afiliados de los Fondos: información del número de afiliados, clasificación por salario y género, y datos de afiliados cotizantes, cesantes y pensionados.
- Reporte del Portafolio de Inversión de los Fondos.

La mayoría de estos reportes se resumen en el comunicado de prensa mensual de la Superintendencia Financiera.

Los valores para las variables usados en el modelo que son requeridos como condición inicial se muestran en la Tabla 4.

C.2. Cambio en el Número de Afiliados de una AFP

Se realizó un estudio panel sobre las seis AFP; se usaron datos de mayo 2002 - noviembre 2005. Una regresión del cambio en el número de afiliados sobre tres variables (rentabilidad trianual del fondo, costos en publicidad, y costos en personal e infraestructura) arrojó los resultados mostrados en la Tabla 5. Se nota que de las tres variables, solo la de costos de personal e infraestructura es significativa. La rentabilidad del fondo no solo no dio significativa, sino que presentó un coeficiente con signo invertido (así, los datos indican que retornos más bajos favorecen débilmente la entrada de nuevos afiliados al fondo). Con estos resultados, se repite la regresión usando

C_{PER}	10.5	J_{TAM}	1,200
J_{COST}	190	$J_{TAM\ SIST}$	35,470
C_{IMP}	1.4	J_{PENS}	0
C_{PUBL}	0.15	$J_{PENS\ SIST}$	0
C_{OTR}	2	J_{RET}	0
C_{RM}	0	$J_{RET\ SIST}$	0
J_{SAL}	0.02	K_{ING}	18
$J_{SAL\ SIST}$	0.0096	K_{COST}	14
J_{AFIL}	50,000	K_{CAP}	45
$J_{AF\ SIST}$	6,315,000	$R_{PORT}(-1)$	19.6 %
$R_{PORT}(0)$	25.3 %	$R_{SIST}(-1)$	17.6 %
$R_{SIST}(0)$	26.0 %	$R_{PR}(-1)$	14.0 %
$R_{PR}(0)$	23.3 %		

Tabla 4: Valores iniciales de variables usadas en el modelo. Cantidades monetarias en miles de millones de pesos.

dif af	Coef.	Error Est.	z	$Prob$
retornofondo	-40510.8	30671.5	-1.32	18.7 %
costospubld	-807.5	2113.3	-0.38	70.2 %
costospers	2626.5	417.9	6.28	0.0 %
const	-841.9	796.6	-1.06	29.1 %
Wald chi2(3) = 80.18				
Prob > chi2 = 0.0000				

Tabla 5: **Estudio Panel para las AFP: Cambio en el número de afiliados vs. retorno del fondo, costos de publicidad y costos de personal. Datos: Mayo 2002 - Noviembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.**

solo la variable significativa. Asimismo, se refinan las variables: como variable dependiente se toma

$$y = \text{Nuevos afiliados a la AFP.}$$

Como variable independiente se toma

$$x = \frac{\text{Costo de la AFP en personal}}{\text{Costo del Sistema en personal}} \times \text{Nuevos afiliados al sistema.}$$

Los resultados se muestran en la tabla 6. Se observa que esta variable explica

dif af	Coef.	Error Est.	t	$Prob$
x	0.9203	0.08283	11.11	0.0%
const	565.3	606.1	0.93	35.2%
$F(1, 233) = 123.45$				
$Prob > F = 0.0000$				

Tabla 6: **Estudio Panel para las AFP: Cambio en el número de afiliados vs. proporción en costos de personal incurridos por la AFP frente al sistema, ajustada por el total de nuevos afiliados en el sistema. Datos: Mayo 2002 - Noviembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.**

aceptablemente el cambio de afiliados de la AFP. Más aún, se puede aceptar un coeficiente de 1 y una constante de 0, que sería suficiente para asegurar que el total de afiliados nuevos en el sistema efectivamente se reparten entre las AFP existentes.

C.3. Nuevos Afiliados en el Sistema

Con los datos del número total de afiliados al sistema de pensiones obligatorias disponibles de la página de la Superintendencia Financiera, se genera una serie de tiempo de su cambio con frecuencia mensual (ΔAf). Se usan datos desde octubre 2001 hasta septiembre 2005. Una regresión contra el tiempo (τ , en meses), arroja los resultados mostrados en la tabla 7. Se

ΔAf	Coef.	Error Est.	t	$Prob$
τ	461.5	62.0	7.45	0.0%
const	52185	1690	30.9	0.0%
$R^2 = 55\%$				

Tabla 7: **Cambio en el número de afiliados del Sistema vs. tiempo. Datos: Octubre 2001 - Septiembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.**

anualiza esta regresión para respetar la frecuencia del modelo: si el cambio mensual en el número de afiliados para el mes t es $\Delta_m Af(t) = \alpha + \beta * t$,

entonces el cambio para el año T es

$$\begin{aligned}\Delta_{an}Af &= \sum_{i=12T-11}^{12T} \Delta_m Af(i) \\ &= 12 * \alpha + 144 * \beta * (T - 1) + 78 * \beta \\ &\simeq 596000 + 66500 * T,\end{aligned}$$

usando los datos de la tabla 7.

C.4. Costos de Personal e Infraestructura

Las tablas 8 y 9 muestran los resultados de regresiones lineales de costos en personal e infraestructura contra el tamaño del fondo para un fondo particular y para el sistema de fondos.

C_{PER}	Coef.	Error Est.	t	$Prob$
J_{TAM}	0.000597	5.75E-05	10.4	0.0 %
const	0.186	0.040	4.634	0.0 %
$R^2 = 74\%$				

Tabla 8: **Costo de Personal e Infraestructura vs. Tamaño del fondo para un fondo. Datos: Junio 2002 - Septiembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.**

C_{PER}	Coef.	Error Est.	t	$Prob$
J_{TAM}	0.000381	1.58E-05	24.1	0.0 %
const	4.31	0.353	12.22	0.0 %
$R^2 = 74\%$				

Tabla 9: **Costo de Personal e Infraestructura vs. Tamaño del fondo para el sistema. Datos: Junio 2002 - Septiembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.**

Por simplicidad y precisión, en el modelo se acomoda esta dependencia para modelar el cambio en el costo en personal con respecto al cambio en el tamaño del fondo.

C.5. Costos de Publicidad y Otros

Las tablas 10 y 11 muestran los resultados de estudios panel para los seis fondos, proyectando los costos en publicidad y otros, respectivamente, sobre los ingresos de la AFP, el número de afiliados del fondo, y el tamaño del fondo. A pesar de que muchas constantes no son significativamente distintas de cero,

C_{PUBL}	Coef.	Error Est.	z	$Prob$
K_{ING}	0.00427	0.0095	0.45	65.3 %
J_{AFIL}	9.1E-08	3.86E-08	2.36	1.8 %
J_{TAM}	4.83E-06	1.49E-05	0.32	74.6 %
const	-0.0051	0.126	-0.4	68.7 %
Wald chi2(3) = 90.3 Prob > chi2 = 0.0000				

Tabla 10: Estudio panel de costos de Publicidad vs. Tamaño del fondo, Número de afiliados, e Ingresos de la AFP. Datos: Junio 2002 - Septiembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.

C_{OTR}	Coef.	Error Est.	z	$Prob$
K_{ING}	0.00116	0.00572	0.2	83.9 %
J_{AFIL}	5.31E-07	1.54E-07	3.44	0.1 %
J_{TAM}	4.9E-05	0.075	0.32	74.6 %
const	-0.0051	0.126	1.21	22.6 %
Wald chi2(3) = 109.3 Prob > chi2 = 0.0000				

Tabla 11: Estudio panel de otros costos vs. Tamaño del fondo, Número de afiliados, e Ingresos de la AFP. Datos: Junio 2002 - Septiembre 2005. Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos del Autor.

el tamaño de su variación motivan a incluirlas usando ecuaciones estocásticas para la evolución de C_{PUBL} y C_{OTR} , como se plantea en la sección 3.3.

D. Resultados

Se exhiben cuatro tablas a continuación. Cada una corresponde a un horizonte específico ($T = 1$ ó $T = 5$) y a una aversión al riesgo específica

($\theta = 12$ ó $\theta = 5$). En cada tabla se muestran las variables de control óptimas para el fondo de pensiones analizado, para distintas especificaciones de la regulación; seis para $T = 1$ y siete para $T = 5$. Para $T = 5$ se adiciona el caso en que no hay Rentabilidad Mínima, caso que es explícitamente resuelto en la sección 4.1.1. Las variables de control son catorce: las primeras doce son los pesos de los activos usados (ver la sección 3.1), y las últimas dos son los dividendos repartidos en cada tiempo, y la cantidad de patrimonio a dejar en la Reserva de Estabilización. Todas son presentadas en términos porcentuales. Se incluye en cada tabla el retorno esperado y la desviación estándar del retorno de cada portafolio. Asimismo en cada tabla se incluye el portafolio del sistema de los fondos a enero de 2006 para facilitar la comparación.

$T = 1, \theta = 12$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD	Div	R E	E[R]	Vol
Caso Base	30.3%	0.6%	0.0%	29.4%	17.8%	1.9%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	0.2%	8.7%	8.68%	5.57%
100% RM, solo PR	21.9%	8.8%	9.8%	30.0%	10.0%	1.2%	0.0%	16.4%	0.0%	0.0%	2.0%	14.4%	5.6%	6.7%	8.00%	4.49%
70% RM, PR eficiente	30.3%	3.4%	0.0%	30.0%	14.9%	1.4%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	13.3%	4.6%	8.49%	5.08%
100% RM	16.2%	16.1%	9.9%	30.0%	10.0%	0.9%	0.5%	12.9%	0.0%	0.0%	3.7%	6.2%	33.9%	20.0%	8.02%	4.82%
100% RM, solo sist	5.7%	17.4%	17.6%	23.9%	14.1%	6.7%	0.0%	0.8%	0.6%	8.9%	4.3%	13.3%	19.9%	24.7%	8.02%	6.05%
Comisión Variable	38.2%	0.7%	6.1%	30.0%	4.1%	1.1%	0.0%	14.0%	0.0%	0.1%	5.8%	1.8%	1.3%	1.1%	7.63%	3.38%
R.E=2.5%, RM con 40%	30.2%	0.3%	0.0%	29.9%	17.8%	1.8%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	0.8%	1.1%	8.69%	5.56%
Portafolio Sistema	4.9%	21.7%	17.2%	21.8%	14.2%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	3.9%	13.4%			7.99%	6.29%

Tabla 12: Resultados del Modelo. $T = 1, \theta = 12$.

$T = 1, \theta = 5$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD	Div	R E	E[R]	Vol
Caso Base	30.3%	0.0%	0.0%	30.0%	17.8%	1.9%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	3.9%	19.8%	8.7%	8.69%	5.56%
100% RM, solo PR	17.4%	11.0%	9.7%	29.7%	10.9%	1.2%	0.0%	16.4%	0.0%	0.0%	3.6%	12.3%	9.5%	98.1%	8.15%	4.73%
70% RM, PR eficiente	30.3%	0.5%	0.0%	30.0%	17.8%	1.4%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	9.3%	20.0%	37.6%	8.69%	5.60%
100% RM	0.2%	16.5%	15.0%	27.6%	14.9%	6.7%	0.0%	8.5%	0.0%	6.1%	4.6%	14.2%	4.2%	30.8%	8.33%	5.96%
100% RM, solo sist	4.9%	21.7%	17.2%	21.9%	14.2%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	3.9%	13.4%	22.2%	1.5%	7.99%	6.30%
Comisión Variable	38.8%	0.0%	0.0%	30.0%	10.0%	1.2%	0.0%	16.4%	0.0%	0.0%	3.6%	4.2%	1.2%	1.1%	8.06%	3.98%
R.E=2.5%, RM con 40%	16.0%	14.4%	0.0%	30.0%	19.1%	0.5%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	2.6%	1.1%	8.86%	6.27%
Portafolio Sistema	4.9%	21.7%	17.2%	21.8%	14.2%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	3.9%	13.4%			7.99%	6.29%

Tabla 13: Resultados del Modelo. $T = 1, \theta = 5$.

$T = 5, \theta = 12$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD	Div	R E	E[R]	Vol
Caso Base	25.0%	5.1%	16.6%	26.2%	8.8%	1.5%	0.0%	12.8%	0.0%	0.2%	3.8%	12.8%	68.2%	1.2%	7.78%	4.36%
100% RM, solo PR	5.2%	10.7%	43.8%	26.0%	7.1%	0.0%	5.0%	0.0%	0.0%	0.0%	2.2%	6.6%	19.3%	1.0%	7.17%	5.58%
70% RM, PR eficiente	30.3%	6.8%	0.0%	30.0%	11.2%	1.9%	0.0%	13.0%	0.0%	0.0%	6.7%	7.9%	72.6%	1.3%	8.24%	4.58%
100% RM	7.4%	16.2%	31.0%	25.7%	10.6%	2.6%	0.0%	3.2%	0.5%	0.0%	2.8%	4.6%	21.2%	1.1%	7.63%	5.82%
100% RM, solo sist	4.7%	21.8%	17.2%	21.9%	14.3%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	4.0%	13.4%	16.9%	1.0%	8.00%	6.31%
Comisión Variable	23.4%	5.0%	11.6%	30.0%	8.1%	1.9%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	21.0%	15.3%	1.1%	7.94%	4.33%
Sin RM	20.3%	10.7%	0.0%	30.0%	18.0%	1.8%	0.0%	13.3%	0.0%	0.0%	6.0%	2.0%	81.8%	1.6%	8.75%	5.94%
R.E=2.5%, RM con 40%	30.3%	0.0%	0.0%	30.0%	17.8%	1.9%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	4.8%	4.4%	8.69%	5.56%
Portafolio Sistema	4.9%	21.7%	17.2%	21.8%	14.2%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	3.9%	13.4%			7.99%	6.29%

Tabla 14: Resultados del Modelo. $T = 5, \theta = 12$.

$T = 5, \theta = 5$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD	Div	R E	E[R]	Vol
Caso Base	15.9%	11.7%	25.2%	27.1%	8.5%	1.2%	0.0%	7.8%	0.0%	0.0%	2.8%	0.0%	67.9%	1.1%	7.60%	4.84%
100% RM, solo PR	6.8%	9.3%	43.4%	27.0%	7.6%	0.0%	0.0%	3.7%	0.0%	0.0%	2.2%	4.7%	19.5%	1.1%	7.31%	5.56%
70% RM, PR eficiente	25.9%	12.0%	0.0%	28.3%	11.8%	1.9%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	78.9%	1.5%	8.28%	4.78%
100% RM	3.2%	16.0%	28.5%	24.3%	10.7%	0.8%	0.0%	12.1%	0.0%	0.4%	4.0%	16.2%	21.8%	1.1%	7.89%	5.65%
100% RM, solo sist	4.9%	21.7%	17.2%	21.9%	14.2%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	3.9%	13.4%	22.2%	1.5%	7.99%	6.30%
Comisión Variable	30.2%	2.1%	11.1%	27.2%	10.0%	1.1%	0.0%	13.1%	0.0%	1.5%	3.6%	15.8%	7.7%	46.7%	7.91%	4.30%
Sin RM	23.2%	8.1%	0.0%	29.0%	17.7%	1.9%	0.0%	14.0%	0.0%	0.0%	6.0%	1.9%	78.8%	1.5%	8.71%	5.78%
R.E=2.5%, RM con 40%	4.9%	11.9%	10.1%	30.0%	19.9%	3.5%	1.8%	5.0%	0.0%	9.1%	3.9%	13.3%	2.7%	2.5%	8.62%	6.57%
Portafolio Sistema	4.9%	21.7%	17.2%	21.8%	14.2%	6.9%	0.0%	0.4%	0.0%	8.9%	3.9%	13.4%			7.99%	6.29%

Tabla 15: Resultados del Modelo. $T = 5, \theta = 5$.