

La serie "Borradores Semanales de Economía" es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los Trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

**EL MERCADO INTERNACIONAL DEL CAFE: UNA  
APLICACION DE LA TEORIA DE JUEGOS**

**Por:  
Hilde Patrón B.**

**1995**

**No. 15**

Para comentarios favor dirigirse a los autores:  
Fax: 2865936 - Teléfono 3421035.-

# **EL MERCADO INTERNACIONAL DEL CAFE: UNA APLICACION DE LA TEORIA DE JUEGOS**

**Hilde Patrón B.\***

**Santafé de Bogotá, Enero 1995**

---

\* Este documento fue presentado como tesis del PEG de la Universidad de los Andes. Se agradecen los comentarios de Diego Escobar, Diego Pizano, Manuel Ramírez y los asistentes a un seminario en CENICAFE. Las opiniones expresadas y sus posibles errores son responsabilidad exclusiva del autor.

## **I. Introducción**

Los últimos años se han caracterizado por cambios importantes en la estructura del mercado mundial del café. Desde mediados de 1989, cuando se terminó el Acuerdo de Cuotas de Exportación, hasta septiembre de 1993, cuando se firmó el Acuerdo de Retención (AR), el mercado funcionó bajo la ausencia de pactos internacionales.

En este documento, se estudia el AR a partir de la Teoría de Juegos para determinar si ésta es una "mejor" situación comparada con aquella de ausencia total de pactos y, establecer, qué tan probable es mantenerla de manera indefinida o que algunos países le hagan trampa a los demás desestabilizando la acción de otros.

Aunque la aplicación de la Teoría de Juegos a la economía no es nueva, en Colombia ha sido poco explorada. Existe una amplia literatura internacional sobre sus aplicaciones a la Teoría de Organización Industrial, Comercio Internacional, Teoría de Contratos, Finanzas Públicas y Macroeconomía en General.

Una ventaja de la Teoría de Juegos sobre la Microeconomía, en este análisis en particular, es la facilidad para modelar comportamientos complejos a partir de herramientas sencillas y económicamente lógicas.

El trabajo está organizado en cuatro partes, además de la introducción. En la segunda parte, se presentan algunas características importantes del mercado internacional del café. En la tercera, se define el modelo. En la sección cuarta, se plantean los problemas de maximización intertemporal de las ganancias de los exportadores de café en situaciones de no cooperación y de cooperación, incluyendo ejercicios de estática comparativa. En la última parte del trabajo se presentan algunas conclusiones.

## **II. El Mercado Cafetero. Inestabilidad de Precios y Mecanismos de Estabilización**

El café es un producto caracterizado principalmente por la inestabilidad del precio internacional, la baja elasticidad precio de la oferta y la demanda, la existencia de demanda por inventarios y la concentración de la oferta y la demanda mundial.

La inestabilidad del precio externo ha determinado la adopción de políticas internas de estabilización del ingreso de los caficultores y el esfuerzo conjunto de varios países por controlar el precio internacional.

Las políticas de estabilización del ingreso a nivel interno consisten en un fondo administrado por la Federación Nacional de Cafeteros (FEDECAFE), el cual paga a los productores, con las reservas que provienen de las ganancias en épocas de precios favorables, y el endeudamiento, un precio más estable que el internacional .

A nivel externo, el interés por estabilizar los precios internacionales se ha reflejado en la formación de acuerdos entre los mismos productores, y entre productores y consumidores como el Acuerdo de Países Productores de Café (APPC) y el Acuerdo Internacional del Café (AIC). Este último terminó en Julio de 1989 y los efectos para Colombia son claros: los precios cayeron y disminuyó el ingreso por exportaciones.

A pesar de los efectos adversos de la terminación del pacto, Colombia se mantiene como el segundo productor y exportador de café a nivel mundial, después de Brasil, y la caficultura aún representa un sector importante de su economía. Es por ello relevante para Colombia lograr niveles de precios mayores y estables. Otras alternativas de estabilización diferentes al Acuerdo Internacional del café son subsidios e impuestos, crédito rural, cubrimiento en el mercado de futuros, diversificación de la producción y acuerdos de productores<sup>1</sup>.

En este trabajo se utiliza la Teoría de Juegos para investigar la última alternativa, ya que ella fue adoptada por Colombia y otros países. Los agentes (cada país) se comportan como maximizadores de su ingreso intertemporal. Sobre esta maximización toman su decisión.

El planteamiento es similar al modelo de duopolio de Cournot en el que las firmas fijan las cantidades a vender. Las dos firmas, 1 y 2, escogen simultáneamente sus

---

<sup>1</sup>Véase Junguito, R y D. Pizano (1982)

cantidades  $Q_1$  y  $Q_2$ . La cantidad producida la venden en el mercado al precio determinado por el total de las cantidades ofrecidas ( $Q_1 + Q_2$ ); a este ingreso se le restan los costos de producción  $C_1(Q_1)$  y  $C_2(Q_2)$ .

Los agentes maximizan su ganancia:

$$U_i(Q_1, Q_2) = Q_i P(Q_1 + Q_2) - C_i(Q_i), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

Suponiendo que las funciones  $U_i$  son diferenciables y cóncavas, se puede maximizar derivando la expresión con respecto a la cantidad  $Q_i$  correspondiente. El resultado es la función de reacción del jugador  $i$ :

$$\frac{\partial U_i}{\partial Q_i} = P(Q_1 + Q_2) + Q_i \frac{\partial P}{\partial Q_i} - \frac{\partial C_i}{\partial Q_i} \quad (2)$$

La intersección de las curvas de reacción de los dos jugadores es el equilibrio de Nash. Si hay más de una intersección entonces habrá más de un equilibrio; si no hay ninguna, dicho equilibrio no existe.

La solución anterior no es la única existente. Los productores pueden reunirse y negociar una solución distinta. De esta manera, si hay cooperación, se puede actuar como un monopolio y repartir la ganancia de acuerdo con un criterio específico<sup>2</sup>, entre otras posibilidades. La repartición de la ganancia debe ser tal que todos los integrantes de la coalición ganen, o al menos no pierdan, con relación a la situación no cooperativa; es decir, la solución final debe, por lo menos, estar en el núcleo del juego que representa todos los acuerdos a los que se puede llegar voluntariamente.

---

<sup>2</sup>Un criterio es el Valor de Shapley que otorga a cada participante de acuerdo a lo que este aporta a la coalición.

Cuando dos o más jugadores se ponen de acuerdo y forman un cartel, se enfrentan a la toma de una decisión entre dos alternativas posibles: cumplir lo acordado o hacer trampa. Un jugador hará trampa si, la ganancia que recibe al no cumplir, es mayor a la que obtiene al cumplir el acuerdo. Sin embargo, si un jugador hace trampa, los demás jugadores lo amenazarán con castigarlo. El resultado del castigo debe ser incluido en la maximización, para determinar si es o no rentable hacer trampa.

A lo largo del trabajo se consideraran juegos cooperativos y no cooperativos en los que los jugadores son los países exportadores de café (Colombia, Brasil, Centroamérica, OAMCAF, Singapur, etc) y las estrategias son las cantidades a exportar<sup>3</sup>. Algunas referencias de trabajos previos son los de Montenegro(1989), Jaramillo (1987) y Cárdenas (1988, 1994) <sup>4</sup>

El presente documento, que corresponde a la simulación del mercado cafetero como un modelo de negociación, se desarrolla también a partir de los trabajos de Eichenberger(1993), Green y Porter(1984), Haurie(1993) y Ott(1992), los cuales desarrollan modelos con teoría de juegos, aplicados a temas diferentes.

---

<sup>3</sup>Una presentación de conceptos, demostraciones y aplicaciones de teoría de juegos se encuentran en distintos libros de texto. Algunas referencias son Fudenberg y Tirole(1992) y Eichenberger(1993)

<sup>4</sup>Montenegro(1989) desarrolló un modelo para el comportamiento del mercado cafetero en situaciones de competencia perfecta, de pacto mundial de cuotas de exportación y de competencia monopolística, teniendo en cuenta las condiciones de comercialización interna de la época. J. Cárdenas(1988) trabajó los equilibrios de Nash teóricos del mercado cafetero bajo una situación sin pacto cafetero internacional y C.F. Jaramillo(1987) desarrolló los equilibrios numéricos de Nash simultáneamente para el mercado de miembros y de no miembros cuando países de distinto "tamaño" se retiran del AIC. El trabajo más similar es el de Cárdenas (1994); en él, se plantea un modelo estático de maximización de los ingresos por exportaciones y se concluye que el acuerdo no es un óptimo de Pareto y que tampoco es "self-enforceable" excepto para Brasil.

### III. Especificación del Modelo:

#### A. Variables del Modelo:

Nombre	Descripción
PINTi(t)	Precio interno real en US\$ del país i en t
PEXT(t)	Precio internacional del café en US\$ en t
D(t)	Deuda neta del FNC en el período t
Gi(t)	Función de ganancias del país i en el período t
Yi(t)	Volumen de producción del país i en el período t
Xi(t)	Volumen de exportaciones del país i en el período t
Si(t)	Volumen de inventarios del país i en el período t
zi	Costo de mantener los inventarios del país i.
r(t)	Tasa de interés real o tasa de dcto intertemporal

#### B. Relaciones Funcionales:

Para los análisis de estática comparativa (sección 4) es necesario conocer el comportamiento de las distintas variables, el cual se puede explicar en las siguientes ecuaciones funcionales:

##### 1. Precio Interno Real:

$$PINT(t) = f(PEXT(t), D(t)), \quad \frac{\partial PINT}{\partial PEXT} > 0, \quad \frac{\partial PINT}{\partial D} < 0 \quad (3)$$

En este trabajo se supone que el precio interno es una función positiva del precio externo y negativa de la deuda neta del fondo<sup>5</sup>.

Si el precio externo aumenta, el precio interno real debe reaccionar en la misma dirección para evitar que diferenciales de precios muy altos estimulen filtraciones por contrabando. Por otra parte, si la deuda neta del fondo aumenta, es necesario disminuir el precio al que el fondo compra el café "tipo federación" que se le ofrece para restaurar sus finanzas. La operación persistente del fondo a precios internos muy altos puede deteriorar su posibilidad futura de afectar los precios mínimos y garantizar el pago de un precio estable a los productores domésticos.

## 2. Precio externo:

$$PEXT(t) = g(X(t), X_1(t), \dots, X_N(t)), \quad \frac{\partial PEXT}{\partial X_i} < 0 \quad (4)$$

El precio externo se fija en el mercado internacional de acuerdo a la interacción de la oferta y la demanda mundial. La oferta internacional está dada por las exportaciones de los países productores de café y, la demanda, por las compras de los países consumidores. El componente de la demanda no está incluido en este análisis, aún cuando la elasticidad del precio externo a la demanda no es igual a cero. Esta simplificación no cambia significativamente los resultados del modelo debido a que la demanda es muy inelástica y relativamente fija<sup>6</sup>.

La relación de las exportaciones al precio externo es como sigue: si aumentan las exportaciones de un país pequeño, el precio internacional no se modifica; si aumentan las exportaciones de un país importante en el mercado, el precio externo cae pues la demanda permanece más o menos constante.

---

<sup>5</sup>En Montenegro(1989), Cárdenas M(1993) y Ocampo(1987) hay referencias empíricas de estas relaciones.

<sup>6</sup>De acuerdo a las estimaciones de Akiyama(1993) la demanda por café crece alrededor del 1% anual.



Aunque el mercado internacional no se puede considerar de competencia perfecta, en este documento, como un primer análisis del mercado internacional, se hace abstracción de modelar detalladamente el comportamiento de los agentes. Es claro que este es un supuesto muy fuerte, el cual afecta los resultados encontrados. La interacción de los agentes variará mucho al tener en cuenta las condiciones de oligopsonio del mercado, la concentración de la demanda en pocas firmas, las características de las mismas, etc.

### 3. Producción:

$$Y(t) = h(P_{INT}(t), P_{EXT}(t)), \quad \frac{\partial Y}{\partial P_{INT}} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial P_{EXT}} > 0 \quad (5)$$

La formulación que se presenta en este trabajo se concentra únicamente en los determinantes económicos de la producción de la siguiente manera: si aumentan los precios, aumenta la rentabilidad del cultivo, y con ello, la producción<sup>7</sup>.

### C. Funciones de Ganancia

El estudio que se realiza a continuación se hace sobre los ingresos cafeteros nacionales suponiendo que la repartición interna es eficiente.

Las funciones de ganancia en un período de tiempo para cada país son:

$$G_i(t) = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

Los ingresos son las ventas y corresponden a la cantidad exportada multiplicada por su valor :

$$X(t) P_{EXT}(t) \quad (6)$$

---

<sup>7</sup>La producción depende de los precios interno y externo pero no de sus niveles contemporáneos sino rezagados. Por simplificar se eliminan los rezagos.

Los costos están dados por el valor de las compras más los costos de mantener inventarios:

$$\begin{aligned} X(t) &= PINT(t) - zS(t), \\ S(t) &= Y(t) - X(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Reemplazando los ingresos y los costos en la función de ganancias se obtiene:

$$G_i(t) = X_i(t) PEXT(t) - zS(t) - PINT(t) Y(t) \quad (8)$$

Como los países maximizan el ingreso de los distintos períodos, deben maximizar el valor presente neto de sus ganancias; es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n G_i(t) \beta^t &= \sum_{t=1}^n [X_i(t) PEXT(t) - PINT_i(t) Y(t) - zS(t)] \beta^t \\ \beta^t &= \frac{1}{(1+r)^t} \end{aligned} \quad (9)$$

Este planteamiento se puede hacer suponiendo que el precio externo es un índice compuesto, lo cual evita distinguir precios externos por cada tipo de café (el supuesto se puede relajar incluyendo una nueva variable  $PEXT_i(t)$ ).

#### IV. Maximización del Ingreso Cafetero

##### A. No Cooperación

En esta sección se plantean los problemas a solucionar, es decir, las maximizaciones intertemporales de los ingresos cafeteros de cada país sujetas a las exportaciones esperadas de los otros países. En esta simulación se supone que todos

los jugadores toman la decisión simultáneamente, que cuentan con igual información y que ésta es perfecta.

Suponiendo que no hay impuestos ni retenciones, y que las tasas de descuento son las mismas en todos los países, cada país maximiza sus ganancias, dadas las exportaciones de los otros países.

El conjunto de jugadores es el grupo de países  $I = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$ , con 0 representando a Colombia (el cual se omite de ahora en adelante). Los índices 1 a N, son el resto de países exportadores de café (v.gr. Brasil, India, Indonesia, Costa Rica, Kenya y el El Salvador).

Las estrategias de cada jugador,  $S_i$ , corresponden a una cantidad exportable  $X_i$  en cada período. El problema de maximización es entonces:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^n [X_1(t) P_{EXT}(t) - zS(t) - P_{INT}(t) Y_1(t)] \beta^t \quad (10)$$

$$\text{Max} \sum_{t=0}^n [X_N(t) P_{EXT}(t) - zS(t) - P_{INT}(t) Y_N(t)] \beta^t$$

Sin embargo, para hacer el problema más sencillo (en especial el caso de negociación), se establecen los siguientes supuestos: 1) el precio interno real en dólares es igual en todos los países; 2) el precio externo es el mismo para todo tipo de café; 3) el precio interno es igual al externo y, 4) los costos de mantener inventarios son los mismos en todos los países e iguales a cero.

El supuesto de los inventarios constantes e iguales a cero es debatible y afecta los resultados del modelo. Se podría hacer un modelo más detallado, que va más allá de los objetivos de este trabajo, el cual determinaría costos crecientes y decrecientes dependiendo del volumen de inventarios. Más adelante, en los estudios de estática

comparativa, se señala brevemente qué tan sensible puede resultar este modelo al supuesto de costos de inventarios constantes.

Con estos supuestos el problema de maximización se reduce a:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^n [X_1(t) - Y_1(t)] P(t) \beta^t \quad (11)$$

$$\text{Max} \sum_{t=0}^n [X_N(t) - Y_N(t)] P(t) \beta^t$$

La condición de primer orden de un país típico corresponde a la derivada del valor presente neto de las ganancias con respecto a sus exportaciones:

$$\frac{\partial G_i(t)}{\partial X_i(t)} - \beta^t \left[ P(t) + X_i(t) \frac{\partial P}{\partial X_i(t)} \right] \quad (12)$$

La solución corresponde a una como la del ejemplo de Cournot presentado anteriormente; la diferencia es que, en lugar de tener dos, se tienen N+1 jugadores, cada uno de los cuales actúa como un oligopolista de Cournot.

Para obtener el equilibrio de Nash se tiene que demostrar primero que este existe para el juego dinámico. El procedimiento se encuentra en el Apéndice 1.

Una vez demostrada la existencia del equilibrio, este se puede caracterizar despejando las exportaciones de la función de reacción(1):

$$X_i(t) = - \frac{P(t)}{\frac{\partial P(t)}{\partial X_i(t)}} \quad (13)$$

Esta fórmula da las exportaciones óptimas del país  $i$  en el período  $t$ , las cuales dependen del precio y de las exportaciones de los demás países.

El efecto de las exportaciones de otros países sobre las de un país particular, dependerá de las relaciones entre los precios interno y externo y de la magnitud del efecto del precio externo sobre el interno<sup>8</sup>.

Después de encontrar el valor de las exportaciones de los períodos  $t=1, \dots, n$ , lo cual maximiza el valor presente neto de la ganancia, es interesante analizar los efectos que tienen sobre ellas cambios en los precios internacionales, dada su volatilidad. Para ello se presentan a continuación los resultados de unos ejercicios de estática comparativa (el procedimiento consiste en reemplazar la solución de Cournot en la función de ganancias y calcular la primera derivada):

**Cuadro No.1**  
**Ejercicios de Estática Comparativa**

Efecto sobre Cambio en	$X_i(t)$	$G_i(t)$
$dX_j(t)$	$< 0$	$< 0$
$dr(t)$	$> 0$	$< 0$
$dP(t)$	$> 0$	$> 0$

Un aumento en las exportaciones de un país grande, o de varios países de cualquier tamaño, presiona a la baja del precio externo. Si el precio externo baja, es necesario restringir la cantidad que se ofrece en el mercado mundial a ese precio para

---

<sup>8</sup>Si adicionalmente se coloca un impuesto en los distintos países (no necesariamente en todos), los resultados cambiarán de magnitud dependiendo de quién paga el impuesto. Si, por ejemplo, el impuesto lo pagan los productores, el precio al que se le compra su producción disminuirá. Si el impuesto se coloca sobre las exportaciones, habrá un nuevo precio externo  $PEXT'$  que es igual al precio externo menos el impuesto. El problema de maximización y la solución tendrán la misma forma.

contrarrestar el primer efecto y lograr niveles de precios más altos. Este efecto se comprueba con el signo de la derivada.

Si por otro lado las autoridades deciden incrementar el precio interno al que se compra la cosecha, los productores responden aumentando la cantidad que pueden ofrecer a esos precios<sup>9</sup>, lo cual aumenta la cantidad exportable.

A su vez, un aumento de las exportaciones de otro país, inicialmente disminuye las ganancias, pues a un menor precio se exporta el mismo volumen; sin embargo, la disminución de las exportaciones podría balancear este efecto de pérdida en el futuro.

Finalmente, un cambio en la tasa de interés o tasa de descuento no tiene, de acuerdo a la modelo planteado, ningún efecto sobre las exportaciones. El efecto de un aumento de la tasa de interés se debe captar analizando los costos de mantener inventarios. A medida que aumenta la tasa de interés, estos costos se vuelven mayores, induciendo una disminución de inventarios y un aumento de las exportaciones.

## **B. El Acuerdo de Retención de los Países Productores de Café(AR)**

Cuando una situación se repite continuamente los jugadores pueden revisar la información pasada o cooperar entre ellos. La solución cooperativa se analiza en esta sección: los países productores se comunican entre ellos y acuerdan restringir sus exportaciones de acuerdo a una variable indicativo, que en este caso, es un precio del índice compuesto(PIC).

Una de las posibilidades del acuerdo es no formar parte de él. La maximización debe entonces considerar la posibilidad de terminar el acuerdo: si las ganancias conjuntas son mayores por fuera de la coalición, ésta se dará por terminada. La solución a este juego existirá en virtud del "folk theorem", el cual dice que, siempre y cuando el factor de descuento exceda cierto valor crítico, cualquier vector de ganancias mayor al de no acuerdo ( $\max G_i$ ) se puede implementar como un equilibrio de Nash<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>El incremento del precio interno también debe disminuir las filtraciones por contrabando.

<sup>10</sup>En Eichenberger(1993)p.218

En estos juegos los participantes en el primer período negocian la distribución de las ganancias actuales y la distribución de las ganancias en los períodos futuros. Si los jugadores esperan que el acuerdo termine rápido, harán trampa. Intuitivamente la razón detrás de este razonamiento es que, si la gente no espera cooperación futura, tampoco esperará trampa en el futuro, pues en los últimos períodos lo único creíble es un equilibrio de Nash. Será entonces necesario que el juego dure indefinidamente (o que así lo esperen los participantes) o que el contrato acordado sea "self enforceable".

Antes de presentar el modelo se explica en qué consiste el Acuerdo de Retención (AR), firmado el 23 de septiembre de 1993 por 28 países firmantes<sup>11</sup>. El AR aplica la siguiente fórmula de retención, consignada en el decreto 1900 de 1993:

- Para precios de US\$0.75 libra o menos, se retiene el 20%
- Para precios entre US\$0.75.01 y us\$0.80, se retiene el 10%
- Para precios entre US\$0.80.01 y us\$0.85, no se retiene ninguna cantidad
- Para precios mayores a US\$0.85.01 se liberan inventarios.

La etapa de reintroducción ocurre una vez se liberen todos los inventarios existentes y cuando se cumple que:

- si el precio en dólares por libra está entre 0.80.01 y 0.85, se retiene 10%
- si el precio es inferior a us\$0.80 libra, se retiene el 20%

El problema se caracteriza por la existencia de incertidumbre acerca de lo que va a suceder con el precio externo. El modelo que se trabaja a continuación se desarrolla a partir de Green y Porter(1984) y Haurie(1993), y consiste en una secuencia de juegos, o juegos de Markov, en los cuales los países miembros del acuerdo le asignan unas probabilidades a pasar de una franja de precios a otra ( de un estado del juego a otro).

El AR es un acuerdo no cooperativo en el que las funciones de oferta y demanda (no directamente observables) tienen efecto sobre los precios internacionales. Estos

---

<sup>11</sup>Los países que firmaron el acuerdo son: Angola, Bolivia, Brasil, Burundí, Camerún, Colombia, Congo, Costa Rica, Costa de marfil, Ecuador, El Salvador, Etiopía, Gabón, Ghana, Guatemala, Honduras, Indonesia, Kenya, Madagascar, Nicaragua, Nigeria, República de CentroAfrica, Ruanda, Tanzania, Togo, Uganda, Venezuela y Zaire.

precios pueden variar dentro de las bandas explicadas o entre ellas. Estas franjas de precios constituyen un conjunto de "trigger prices" que determinan los porcentajes a retener de las exportaciones o, lo que es lo mismo, determinan el paso de un estado del juego a otro.

Intuitivamente el modelo dice que los países exportan de acuerdo a su estrategia de Cournot( $X_i^c$ ) (como se encontró en la sección 4.1) mientras que los precios sean superiores a 80 centavos de dólar por libra(80c/lb). Si el precio baja a menos de 80c/lb, pero está por encima de 75c/lb, exportan  $0.9X_i^c$ , y si está por debajo o es igual a 75c/lb, exportan  $0.8X_i^c$ .

Si un país exporta más de  $X_i^c$  durante el período cooperativo (o más de  $0.9X_i^c$ , ó  $0.8X_i^c$  cuando se está en la banda de precios que le corresponde a cada cantidad), aumentan las ganancias del país en este período pero también aumenta la probabilidad de que el precio de mercado baje por debajo de 80c/lb (ó por debajo de 75c/lb). Este comportamiento incrementa el riesgo de que los productores entren en un episodio adverso durante el cual las ganancias de todos serán menores.

El modelo formal introduce los siguientes supuestos: 1) la oferta es estable. La importancia de este supuesto es que permite la programación dinámica estacionaria; 2) los países sólo manipulan una variable: sus exportaciones; 3) la información sobre el ambiente cafetero es pública y 4) los exportadores de café monitorean el PIC que es un reflejo imperfecto del nivel de exportaciones de los países.

El modelo se caracteriza por la presencia de  $N+1$  firmas indiferentes al riesgo, las cuales maximizan el valor esperado de sus utilidades (en el apéndice 2 se presenta el modelo y las condiciones de equilibrio).

Finalmente, es necesario definir los estados sobre los que se juega, los cuales están en función del nivel del PIC: un período  $t$  es un período normal si  $t=0$  o si  $P \geq a$  80c/lb,  $t$  es adverso de lo contrario;  $t$  será adverso de dos tipos:  $r$  y  $R$ . Será adverso  $r$  si  $0.75 < P(t) \leq 0.8$  y será adverso  $R$  si  $P(t) \leq 0.75$ .

De esta forma, los perfiles de estrategias óptimas se pueden definir como:



$$\begin{aligned}
X^c &= (X_{1,1}^c, \dots, X_{N,1}^c) = \left[ \frac{P(t)}{\frac{\partial P}{\partial X}}, \dots, \frac{P(t)}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right] \\
X &= (X_{1,1}^r, \dots, X_{N,1}^r) = \left[ \frac{0.9 P(t)}{\frac{\partial P}{\partial X}}, \dots, \frac{0.9 P(t)}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right] \\
X^R &= (X_{1,1}^R, \dots, X_{N,1}^R) = \left[ \frac{0.8 P(t)}{\frac{\partial P}{\partial X}}, \dots, \frac{0.8 P(t)}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Así, el problema de cada firma es un problema de maximización dinámica de Markov en T etapas. El juego está definido y con el quedan definidos los ejercicios de estática comparativa, a excepción de uno: qué pasa con las exportaciones de los demás países cuando uno hace trampa?, es decir, cómo responden los países productores y exportadores de café cuando uno de los miembros decide exportar más de lo que está acordado y definido de acuerdo a unas bandas de precios? La respuesta es clara: cuando un país aumenta unilateralmente sus exportaciones, puede o no afectar el precio internacional. De no afectarlo, los demás países no responden; de hacerlo, los países sólo responderán cuando el cambio (negativo) en el precio internacional se pase a una banda inferior. El resultado será una ganancia menor para todos los países incluyendo a aquél que hizo trampa. Este planteamiento deja en claro que los países sólo harán trampa si la probabilidad de que el precio caiga es baja ( lo cual solamente se podrá presentar en países pequeños). La demostración de los proposiciones que se presentan a continuación se encuentran en el anexo 3.

Los resultados a los que se llega son dos: primero, el AR es preferible a que no exista acuerdo de ningún tipo, en la medida en que el valor presente de las ganancias es mayor en el acuerdo; segundo, no se puede determinar con seguridad si los miembros le serán fieles al Acuerdo. El cumplimiento de lo pactado dependerá de la

probabilidad de afectar los precios internacionales, la cual está relacionada directamente con el tamaño del país: entre más pequeño sea en el mercado, menor es el efecto sobre los precios y menor es la posibilidad de entrar en un estado adverso.

Como el AR es "rentable", se pueden analizar situaciones que pueden presentarse, como cambios en precios, tasas de interés y producción. Los resultados de estos ejercicios se presentan en el siguiente cuadro.

**Cuadro No.2**  
**Estática Comparativa**

Efecto sobre Cambio en	$X_i(t)$	$G_i(t)$
$dX_j(t)$	?	?
$dP(t)$	?	$> 0$
$dr(t)$	?	$< 0$

Un aumento en las exportaciones acordadas del país  $j$  no necesariamente induce una estrategia de castigo. Esta sólo se dará (y lo hará naturalmente, y no como estrategia de castigo) cuando el aumento de las exportaciones de un país logre presionar los precios hacia la baja lo suficiente como para pasar a una nueva franja de precios. Si el precio está por debajo de los 75c/lb, a un aumento de las exportaciones del país  $j$  no se le responderá con una nueva estrategia pues, en este estado, la retención es la máxima y las ganancias las mínimas para todos los países.

De la misma forma, si aumenta el precio externo(que en este modelo es igual al interno), las exportaciones aumentarán si el precio pasa a una franja superior. En el estado normal, si los precios son superiores a 80c/lb, un aumento del precio no genera ninguna respuesta cualitativa en las exportaciones; sin embargo, el volumen se afecta en la medida en que la estrategia de Cournot es una función positiva del precio de

mercado. El incremento en el precio, aumenta los ingresos de los exportadores y con ello las ganancias.

Un aumento en la tasa de interés no tendrá efecto sobre las exportaciones, siempre y cuando el precio externo no sea función de la tasa de interés o el estado del mercado sea adverso de alguno de los dos tipos. El aumento en la tasa de interés sí aumenta los costos de los exportadores y disminuye las ganancias (a menos que el PIC sea mayor a 80c/lb y el efecto de los costos se pueda compensar liberando inventarios y aumentando el volumen exportado).

### **C. Helada en el Brasil**

Varios meses después de la firma, y de estar en funcionamiento el sistema de retención de exportaciones de los países productores de café, el precio internacional se había elevado continuamente. El desempeño favorable del precio externo no sólo ha dependido de la restricción de la oferta sino también del exceso de demanda por café. Recientemente, las bajas temperaturas registradas en Brasil forzaron mayores alzas en los precios que podrían permanecer durante un par de años. Teniendo en cuenta las expectativas de los agentes frente a la helada en el Brasil, a continuación se utiliza el modelo simple planteado en este documento para analizar los efectos que la baja en la cantidad exportable del Brasil tiene sobre el precio internacional y sobre las exportaciones de Colombia dentro del marco del AR.

Para realizar el ejercicio se introduce un supuesto adicional, el cual facilita la identificación de los efectos de una helada en el Brasil: en su maximización, los miembros del mercado toman la producción de Brasil como un dato. Este último país actuará como un "líder" en el juego de Stackelberg, mientras que los países restantes serán "seguidores". Es fácil demostrar (pero no se presenta en este documento) que las soluciones de este juego tendrán la misma forma que aquellas en el juego de Cournot. La diferencia radica en que la estrategia de Brasil (que de ahora en adelante se denotará  $X_e$ ) está dada.

Como se vio en la sección 4.2, el precio en cada período de tiempo es una función negativa de las exportaciones de todos los oferentes; en particular, en la actualidad el precio es una función de las cantidades de Cournot dado que el precio es superior a los 85c/lb:

$$P = f(X^c(t), X_1^c(t), \dots, X_N^c(t)),$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} \leq 0 \quad (15)$$

Y las exportaciones óptimas de cada país corresponden a:

$$X_i^c = e_{x,p} X_i(t) \quad (16)$$

en donde  $e_{x,p}$  es la elasticidad precio de las exportaciones y  $X_i$  es la cantidad exportable.

En el siguiente cuadro se reproducen las elasticidades precio de la oferta de algunas países, de acuerdo a estimaciones previas que se encuentran en la literatura; ninguno de estos valores es estimado en este trabajo:

**Cuadro No.3**  
**Elasticidades Precio de la Oferta de Exportación<sup>12</sup>**

	Corto Plazo	Largo Plazo
Brasil	0.01	0.41
Colombia	0.14	0.99
Costa Rica	0.07	0.44
El Salvador	0.22	1.17
Guatemala	0.33	0.86
Honduras	0.34	0.85
México	0.04	1.51

Fuente: Junguito, R. y D. Pizano (1993)

<sup>12</sup> Al utilizar este concepto de elasticidad se introduce un nuevo supuesto al modelo: la proporción de exportaciones -inventarios es constante.

El ejercicio que se presenta a continuación consiste en suponer que por efectos climatológicas la cantidad exportable del Brasil se reduce en 30%, así:

$$dX_B = -0.3 X_B \quad (17)$$

y,

$$\frac{dX_B^c}{X_B^c} = \frac{dX_B}{X_B} = -0.3 \quad (18)$$

Como todos los países tienen igual información y toman su decisión al saber como juega Brasil, su solución tendrá una forma como la que sigue:

$$X_i^c = e_{x,p} X_i \quad (19)$$

en donde  $X_i = X(X_i^c, X_B)$ .

De esta forma, el efecto de una disminución ( o aumento ) en la producción del Brasil tiene el siguiente efecto sobre las exportaciones de los demás países:

$$\frac{dX_i^c}{dX_B} = e_{x,p} \frac{dX_i}{dX_B} \quad (20)$$

Después de sustituciones algebraicas sencillas y de despejar, la ecuación (24) se puede escribir como :

$$\frac{dX_i^c}{X_i^c} = -e_{x,p} e_{x_B,p} \frac{dX_B}{X_B} \quad (21)$$

La ecuación (21) muestra en cuánto cambian porcentualmente las estrategias de los jugadores (países) cuando cambia la producción de Brasil. Aplicando esta ecuación a las elasticidades presentadas en el cuadro 3 y, suponiendo una caída del 30% en las exportaciones de Brasil, se obtienen las respuestas de los "seguidores" a la helada del Brasil. Los resultados se resumen en el cuadro 4.

**Cuadro No.4**  
**Respuestas a la disminución en las exportaciones de Brasil**

	$dX_i^c/X_i^c$
Colombia	0.121
Costa Rica	0.054
El Salvador	0.143
Guatemala	0.105
Honduras	0.104
México	0.185

El resultado para esta muestra de países es el esperado: al disminuir en 30% las exportaciones del Brasil, los demás países incrementan sus exportaciones aunque la estrategia óptima sigue siendo la misma, es decir, la de Cournot (porque los precios no han pasado a una nueva franja). En particular, en un plazo de 5 años, Colombia aumenta sus exportaciones en algo más del 12%, Costa Rica las aumenta en 5%, El Salvador 14%, Guatemala y Honduras 10% y México 18%.

Las mayores exportaciones de los demás países se dan por dos posibles razones: la primera, para aprovechar el mayor precio y obtener mayores ganancias sin riesgo de entrar en un estado de la naturaleza no normal, pues el precio está muy alto y la probabilidad de bajarlo en más del 200% de un día para otro no parece alta; la segunda, para exportar más es estabilizar el precio tan alto. Si se incluyen en el análisis la

totalidad de países, es probable que en el corto plazo el precio caiga, pero no parecería probable que se pase de un estado de los precios a otro ( de normal a adverso).

La variación en las exportaciones de los países es equivalente a un cambio en la oferta del grano que presiona cambios en los precios internacionales. Para analizar los efectos sobre los precios, se supone que el universo cafetero está constituido únicamente por los países incluidos en el análisis anterior. Teniendo en cuenta las variaciones porcentuales en las exportaciones de estos países y sus elasticidades, se obtiene la variación porcentual de los precios al cabo de un período de más o menos 5 años.

Formalmente, el cambio en los precios está dado por:

$$dP = \frac{dP}{dX_1^c} dX_1^c + \frac{dP}{dX_B} dX_B + \frac{dP}{dX_2^c} dX_2^c + \dots + \frac{dP}{dX_N^c} dX_N^c \quad (22)$$

Sustituyendo los valores conocidos y despejando, se obtiene que la variación en los precios al cabo de cinco años es de 65%; esto quiere decir que si hoy el precio está en dos dólares por libra, en cinco años estará en 3.3 dólares por libra ( suponiendo que el estado de la naturaleza permanecerá igual).

Si además de esto se tiene en cuenta el exceso de demanda que existe en la actualidad, y la disminución reciente en las existencias, el problema puede convertirse, de acuerdo a lo planteado en este modelo simplificado, en un problema de oferta que determine una nueva etapa recesiva del mercado, a menos que se modifique el esquema de retenciones.

## V. Conclusiones

En este trabajo se planteó el funcionamiento del mercado internacional del café a partir de dos modelos dinámicos simplificados, correspondientes a un escenario no cooperativo y al Acuerdo de Retención de los Países Productores de Café. De los ejercicios de estática comparativa se deducen las siguientes conclusiones:

1. Cuando un país grande ( o varios pequeños) aumenta sus exportaciones, en un escenario de no negociación, Colombia debe disminuir sus exportaciones para contrarrestar el efecto negativo sobre el precio internacional y conseguir mejores ganancias. Se podría argüir que, si Colombia aumenta sus exportaciones, gana participación en el mercado y puede afectar sus ganancias futuras; sin embargo, en el ejercicio aquí desarrollado se incluyen las ganancias futuras, incluyendo los comportamientos de los demás países, de forma que ésta sigue siendo la reacción óptima.

2. Si aumentan los precios ( externo o interno) o la tasa de interés, deben aumentar las exportaciones de Colombia mientras no existan acuerdos internacionales.

3. De acuerdo al modelo utilizado, el Acuerdo de Retención es "self enforceable" para los países grandes, pero no para los pequeños. Esta conclusión difiere de la encontrada por Cárdenas (1994). Cárdenas encuentra, también a partir de un modelo de Teoría de Juegos muy similar al nuestro, que el acuerdo no es "self-enforceable", ni para los países pequeños, ni para Colombia. Posibles explicaciones de estas diferencias son: el carácter estático del modelo de Cárdenas, el planteamiento diferente de los costos de mantener inventarios y la ausencia de parámetros que capten la incertidumbre del mercado.

4. Los efectos que un aumento en el precio internacional tienen sobre las exportaciones de los miembros del juego dependerán de la franja en la cual se encuentre el índice del precio compuesto y de la magnitud del cambio en el precio.

5. Una disminución de 30% en la cantidad exportable del Brasil produce alzas razonables en las exportaciones de los demás países y alzas en los precios internacionales. Aunque el resultado es una mayor fluctuación del precio externo no parece muy probable un traslado de un estado normal de la economía a uno adverso.

Aunque el modelo es ilustrativo tiene limitaciones importantes que vale la pena reconocer. La primera de ellas es el supuesto de igualdad de precios a nivel interno e internacional. En un país como Colombia, que el precio interno no es un reflejo perfecto del precio internacional.



La segunda limitación del modelo es el supuesto de homogeneidad del café. Un tercer problema del trabajo es el suponer que la oferta es estable. Por razones climatológicas y por el tiempo que transcurre entre la siembra del cafeto y la recolección de los granos, la oferta no es estable en el tiempo. Este hecho se puede probar empíricamente observando cualquier serie del volumen de producción cafetera; sin embargo, este supuesto es indispensable para la programación del juego de Markov correspondiente al AR.

A pesar de las limitaciones de los modelos, estos son una representación que plantea matemáticamente comportamientos muy intuitivos, los cuales pueden servir como guía de análisis en los problemas prácticos.

## Bibliografía

- Akiyama,T y P. Varangis(1993) "Prospects for the World Coffee Market" . International Trade Division. The World Bank. Washington D.C. Feb. Banco de la República (1991) Regimen Cambiario 1991
- Caballero,C y G. Perry (1989) "Ajustes del Sector Externo a Ciclos de Precios del Café", en José A. Ocampo (ed) La Política Económica en la Encrucijada, Bogotá, Banco República-CEDE
- Cárdenas, J.H. (1989a) "Notas para un Debate sobre el Acuerdo Internacional del Café" en Coyuntura Económica, VolXIX, No.1, Marzo
- (1989b) "El Futuro del mercado Internacional del café y sus efectos sobre la economía cafetera Colombiana" en Debates de Coyuntura económica No. 15. Diciembre.
- (1994) "The Ceasing of the International Coffee Agreement: Struggling with blinded competition in a non-cooperative situation", Cambridge, Agosto. Mimeo.
- Cárdenas, J. (1989) "La Nueva Coyuntura Cafetera Internacional" en Economía Colombiana, Septiembre
- Cárdenas, M(1993) "Stabilization and Redistribution of Coffee Revenues: A Political Economy Model of Commodity Marketing Boards". FEDESARROLLO, Abril 7
- Correa, M.C. (1989) "Políticas de Estabilización Cafetera en Colombia" Banco de la República. Tesis de Magister. Universidad de los Andes.
- Cuddington, J. (1988) " El Manejo de las Bonanzas de Exportación: El Caso del Café" en, Coyuntura Económica, Vol XVIII, No. 2, Junio
- Eichberger (1993) Game Theory for Economists. Academic Press Inc.
- Fudenberg,D. y J. Tirole (1991) Game Theory, The MIT Press, Cambridge Massachussets, London England.
- Green,E. y R. Porter (1984) " Noncooperative Collusion Under Imperfect Information". Econometrica. Vol 32. No.1. Enero.

- Haurie (1993) " From Repeated to Differential Games: How Time and Uncertainty Pervade the Theory of Games" en Frontiers of Game Theory. ed. Binmore, Kirman, Tani.
- Ives, R. (1989) "Convenio Internacional del Café" en Economía Colombiana, Septiembre.
- Jaramillo C.F. (1987)"El Mercado Mundial del Café: Efecto del Retiro de Países Importadores de la OIC" en Lecturas de Economía Cafetera. Ed, J.A.Ocampo. Cap 6. 3er mundo editores. Fedesarrollo.
- Jaramillo,C.F., C.E. Posada y E. Trujillo(1993) La Determinación del Precio Interno del Café en un Modelo de Optimización Intertemporal.
- Junguito, R. (1988) "Comentarios Sobre el Contrato Gobierno–Federación" en Debates de Coyuntura Económica, Diciembre
- (1989) "Política Cafetera y Ajuste después de Londres" en Debates de Coyuntura Económica: El Rompimiento del Pacto Cafetero, Su Impacto Económico, FEDESARROLLO, Diciembre
- , Pizano(1982) "Primary Products in Latin America". En Latin America and the New International Economic Order. Eds French–Davis y Tirole. MacMillan
- (1991) Producción de Café en Colombia. Bogotá, FEDESARROLLO
- (1993) (Coordinadores) El Comercio Exterior y la Política Internacional del Café. Fondo Cultural Cafetero y FEDESARROLLO.
- Leibovich, J(1982)"La producción de un Cultivo Permanente. Aplicaciones de un Modelo de Corto y Mediano Plazo al Café en Colombia". En Lecturas de Economía Cafetera. FEDESARROLLO.
- (1988) "La Eficiencia del Fondo Nacional del Café: Un Análisis para el Período 1979–1986" en, Coyuntura Económica, Vol XVIII, No.4, Diciembre
- (1989a) "Evolución Reciente y Perspectivas del Sector Cafetero" en Coyuntura Económica, Vol XIX, No.1, Marzo
- (1989b) "Elementos para una Nueva Política" en Economía Colombiana, Septiembre

- (1989c)"El Colapso Mundial y sus Impactos para Colombia", en Debates de Coyuntura Económica: El Rompimiento del Pacto Cafetero, Su Impacto Económico, FEDESARROLLO, Diciembre
- Montenegro, A. (1989) Economía de un Sector Exportador Regulado: El Caso del Café en Colombia.
- Ocampo, J.A.(1987) Lecturas de Economía Cafetera, Bogotá, Tercer Mundo- FEDESARROLLO
- (1988) "Criterios para la Renegociación del Contrato de Administración del Fondo Nacional del Café", en Debates de Coyuntura Económica, Diciembre
- (1989a)"Ciclo Cafetero y Comportamiento Macroeconómico en Colombia, 1940-1987" Coyuntura Económica, Vol XIX, No.3 Oct
- (1989b)"Ciclo Cafetero y Comportamiento Macroeconómico en Colombia, 1940-1987(continuación)" Coyuntura Económica, Vol XIX, No.4, Diciembre
- Ott, N.B(1993) Intrafamily Household and Bargainig Decisions.
- Pizano D,(1989) "El Colapso del Acuerdo Internacional del Café" en Economía Colombiana, Septiembre
- Ramírez, J. (1989) "El Nuevo Escenario Cafetero" en Debates de Coyuntura Económica: El Rompimiento del Pacto Cafetero, Su Impacto Económico, FEDESARROLLO, Diciembre
- Restrepo, J. (1988) Política de Comercialización Externa e Interna del Café. Foro organizado por el Senado de la República.
- (1989)"Coyuntura Cafetera y Perspectivas" en Economía Colombiana, Septiembre Revista del Banco de la República. Octubre de 1993.
- Santos, J.M.(1988) "El Contrato de Administración del Fondo Nacional el Café" en, Debates de Coyuntura Económica, Diciembre
- Sarmiento, E. (1989) "La Realidad luego del Colapso Cafetero", en Economía Colombiana, Septiembre
- Zuleta, L.A.(1988) "El Contrato de Administración del Fondo Nacional del Café" en, Debates de Coyuntura Económica, Diciembre

## Anexo 1

### Demostración de la Existencia del Equilibrio de Nash

**Teorema 1:** Si la función de reacción  $F(X)$  es una contracción entonces existe un único equilibrio de Nash<sup>13</sup>.

Con este teorema se puede demostrar simultáneamente la existencia y unicidad del equilibrio de Nash de este juego. Para ello se denomina  $F(x) = dG_i(t)/dX_i(t)$  y se muestra que esta función es una contracción. Primero se define lo que esto quiere decir.

**Definición 1<sup>14</sup>:** Se dice que una función  $F(x)$  es una contracción si existe un  $\lambda$  en los reales,  $0 < \lambda < 1$ , tal que, para todo par  $x, x'$  en el dominio de  $F$ , se cumple que:

$$| F(x) - F(x') | < \lambda | x - x' |$$

Teniendo en cuenta el anterior teorema (que es el teorema del punto fijo) y, la definición se plantea el siguiente teorema:

**Teorema 2:** La función de reacción  $F(x)$  es una contracción.

Demostración:

Sea  $\lambda = | dP(t)/dX(t) |$ <sup>15</sup> y sean  $X, X'$  números reales positivos finitos<sup>16</sup> y para cada  $X$  existe un  $P$  asociado.

---

<sup>13</sup>Eichenberger, op.cit. pp.106

<sup>14</sup> $\lambda < 1$  porque se supone que un aumento en las exportaciones no se traduce en un aumento proporcional del precio externo. Este es un supuesto lógico en la medida en que existen otros factores de mercado que afectan el precio internacional del café, como la tenencia de inventarios de los países consumidores, el proceso de tostado del café que mezcla distintos tipos de calidad, etc.

<sup>15</sup>Los números  $X, X'$  son finitos pues sólo se exporta un volumen finito de café.

<sup>16</sup>Como se supone que la calidad de café es homogénea, el precio reaccionará de igual forma a exportaciones de distinta procedencia.

Se va a demostrar que  $|F(x) - F(x')| < |dP(t)/dX(t)| |x - x'|$

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(x')| &= \left| \frac{\left( P + x \frac{\partial P}{\partial X} \right)}{1+r} - \frac{\left( P' + x' \frac{\partial P}{\partial X} \right)}{1+r} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{1+r} \right| \left| \left( P - P' \right) + \left( X - X' \right) \frac{\partial P}{\partial X} \right| \\
 &< \left| \left( P - P' \right) + \left( X - X' \right) \frac{\partial P}{\partial X} \right| \\
 &\leq \left| P - P' \right| + \left| \left( X - X' \right) \frac{\partial P}{\partial X} \right| \\
 &< \left| \left( X - X' \right) \frac{\partial P}{\partial X} \right| \\
 &= \left| \frac{\partial P}{\partial X} \right| |X - X'| \\
 &= \lambda |X - X'|
 \end{aligned}$$

El teorema queda demostrado. Entonces existe el equilibrio de Nash para el juego que sucede una sola vez. Para demostrar que el equilibrio existe en el juego que se repite se debe aplicar el siguiente teorema:

**Teorema 3<sup>17</sup>:** Sea  $S^*$  equilibrio de Nash del juego estático  $\Gamma$ . Sea  $S_t^*$  la combinación de estrategias del juego repetido, en donde  $S_t^*$  es una función de la historia del juego  $ht$  (es decir la serie de estrategias sucedidas hasta  $t$ ). Entonces para todo  $\delta$  en  $(0,1)$  tal que  $\sigma^* = (S^*(1), \dots, S^*(n))$ ,  $\sigma^*$  es un equilibrio de Nash del juego repetido  $\Gamma(\delta)$ , donde  $\delta$  es el factor de descuento.

---

<sup>17</sup>Eichenberger, op.cit. pp.212

**Anexo 2**  
**Problema de Maximización del AR**

Las firmas maximizan el valor esperado de sus ganancias así:

$$\begin{aligned} \text{Max } E \left[ \sum_{t=0}^{\alpha} (X_N(t) - Y_N(t)) P(t) \right] \\ \text{Max } E \left[ \sum_{t=0}^{\alpha} (X(t) - Y(t)) P(t) \right] \end{aligned}$$

en donde el precio es una función de la oferta:

$$P(t) = P \left( \sum_{i=0}^N X_i(t) \right)$$

El equilibrio de Nash será un perfil de estrategias  $(S_1^*, \dots, S_{N+1}^*)$  tal que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} E_{S_1, \dots, S_i, \dots, S_N} \left[ \sum_{t=0}^{\alpha} \beta^t (X_i(t) - Y_i(t)) P(t) \right] \\ \geq E_{S_1, \dots, S_i, \dots, S_N} \left[ \sum_{t=0}^{\alpha} (X_i(t) - Y_i(t)) P(t) \right] \end{aligned}$$

Las estrategias de cada país serán una secuencia  $\{S_{it}\}_t^1$ ,  $S_0 = X_0$  y  $S_1 = S_{i(P(0), \dots, P(t))} = X_{it}$ . Un perfil de estrategias  $(S_1, \dots, S_N)$  determina recursivamente un proceso estocástico en los precios, que a su vez induce una distribución de probabilidad en la secuencia (infinita) de los precios.

### Anexo 3

#### Prueba de las Proposiciones

Para ilustrar la preferencia de acuerdo sobre no acuerdo, junto con los demás ejercicios de estática comparativa, se definen las funciones de ganancias esperadas de los países bajo este esquema pero, para facilitar la notación, se introducen antes otras funciones:

$$v_i = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi_i(x_i^t)$$

$$w_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N x_j^t(t)$$

$$\gamma_i(x_i^0) = \pi_i(x_i^0, P(x_i^0, \sum_{j=1}^N x_j^0))$$

$$\delta_i(0.9x_i^0) = \pi_i(0.9x_i^0, P(\sum_j 0.9x_j^0))$$

$$\alpha_i(0.8x_i^0) = \pi_i(0.8x_i^0, P(\sum_j 0.8x_j^0))$$



Con esta notación se encuentra que la función de ganancias presentes de la firma  $i$ , siempre que se cumple el acuerdo, se puede escribir como:

$$\hat{V}_i(X_i^c) = pr(P > 0.8) \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \gamma_i(X_i^c) \right] +$$

$$pr(0.75 \leq P < 0.8) \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \delta_i(0.9X_i^c) \right] +$$

$$pr(0.75 \geq P) \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \alpha_i(0.8X_i^c) \right]$$

Conociendo estas funciones se puede escribir la ganancia del acuerdo como:

$$\hat{V}_i = pr(P > 0.8) V_i + pr(0.75 < P \leq 0.8) \delta_i + pr(P \leq 0.75) \alpha_i$$

Finalmente, la función de ganancias cuando se hace trampa en un período sería:

$$V_i^* = (X_i^* + Y_i) P + q V_i + (1 - q) \hat{V}_i$$

Conociendo estas dos funciones se puede tratar de responder a dos preguntas: ¿ es factible ( o favorable) para los miembros este acuerdo? y ¿ vale la pena hacer trampa? La respuesta a la primera pregunta es claramente sí; la solución a la segunda quedará indeterminada en el marco del modelo aquí planteado como se muestra a continuación.

De acuerdo a la notación previa, el país  $i$  entrará al acuerdo siempre y cuando  $V_i$  sea menor que  $V_i'$ , lo cual se cumple de acuerdo al siguiente razonamiento que voy a demostrar por contradicción:

$$V_i > aV_i + b\delta_i + c\alpha_i$$

$$\rightarrow V_i > aV_i + b \left[ V_i - 0.1 \frac{-P^2}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right] + c \left[ V_i - 0.2 \frac{-P^2}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right]$$

$$\rightarrow V_i > V_i - 0.3(b + c) \left[ \frac{-P^2}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right]$$

$$\rightarrow b + c < 0$$

Lo cual es una contradicción ( las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$  corresponden a las probabilidades adecuadas del estado de los precios). Como el teorema es cierto, entonces el acuerdo es conveniente.

La segunda proposición a analizar es aquella de hacer trampa. Un país hará trampa si  $i > V_i'$ .

Si  $V_i^* > V_i'$

entonces:

$$(X_i^* + Y_i)P + qV_i + (1 - q)V_i^* > V_i$$

$$\rightarrow (X_i^* + Y_i)P > qV_i + qV_i^*$$

$$\rightarrow (X_i^* + Y_i)P > q \left[ V_i + 0.3(b + c) \left[ \frac{-P^2}{\frac{\partial P}{\partial X}} \right] \right]$$

$$\rightarrow (X_i^* + Y_i)P > 2qV_i$$

Esta última condición no será necesariamente cierta y dependerá en parte del tamaño del país que determina la probabilidad de que se termine el acuerdo ( o de ser detectado)