RELACIONES DINÁMICAS ENTRE CRECIMIENTO ECONÓMICO E INFLACIÓN

Óscar Arturo Benavides González[*]
Adriana Ivonne Cárdenas Anaya[†]

Resumen

En este documento se analizan las relaciones dinámicas entre crecimiento e inflación en un escenario interactivo en el que, a partir de un modelo de crecimiento endógeno se determinan de manera simultánea el nivel de inflación y la tasa de crecimiento del producto. El modelo muestra que la tasa de crecimiento del producto es determinada por el promedio ponderado de las tasas de rentabilidad de la inversión en capital humano y tecnología. Así mismo, se muestra que la rentabilidad de la inversión en capital humano es afectada por la política fiscal y en especial se demuestra que el otorgamiento de un subsidio a la acumulación de capital humano, financiado con impuestos al ingreso, mejora la tasa de crecimiento de la economía en el largo plazo. De igual manera, se muestra que a partir de las decisiones de los agentes, quienes demandan dinero para efectuar transacciones, se determina el nivel de inflación de la economía. La interacción dinámica entre crecimiento e inflación se plantea a través de un juego de coordinación en el que existe un único equilibrio de Nash en estrategias puras. El análisis muestra que la estrategia intervención-intervención es evolutivamente estable, es decir, para los dos jugadores, gobierno y banco central, la estrategia que intertemporalmente genera mayores pagos es buscar la mayor tasa de crecimiento con una política fiscal expansiva, y política monetaria contractiva, para reducir la tasa de inflación.

Palabras claves Crecimiento Endógeno e Inflación
Clasificación JEL O41, O42, E31

[*] Profesor ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA, Profesor de Cátedra UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, y miembro de la Unidad de Estudios en Interacciones Económicas.

[†] Asistente de Investigación Observatorio de Coyuntura Macroeconómica. UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA.

1. Introducción

La relación existente entre crecimiento e inflación ha sido objeto de estudio por parte de diversas corrientes de pensamiento económico. Sin embargo su análisis se ha realizado en un contexto de corto plazo, tanto del punto de vista teórico como empírico, y no se ha aprovechado la estructura de los modelos de crecimiento ni las herramientas de optimización dinámica para mostrar la relación que existe entre estas dos variables. Los estudios se han enfocado en los problemas de estabilidad de precios como condición para el crecimiento, pero no han hecho énfasis en la manera como el crecimiento económico afecta la inflación. En general, se ha analizado la inflación como una de las variables que definen la estabilidad macroeconómica, la cual ha de conducir hacia el crecimiento económico de corto y mediano plazo.[1]

La teoría del crecimiento con el fin de analizar la inflación, incluyó el dinero en distintos análisis teóricos, los cuales se pueden clasificar en dos grupos, según la forma como introduzcan el dinero en el esquema formal: primero, por medio de la función de utilidad (o su análoga la función de producción), o segundo a través de la restricción de los agentes. Por ejemplo, Sidrausky (1967) introduce el consumo y los saldos reales de dinero en la función de utilidad, por lo tanto la restricción del consumidor incluye el impuesto inflacionario, y al resolver el problema de maximización de los individuos se obtiene su demanda de dinero. En este modelo se concluye que en estado estacionario el nivel de consumo y el acervo de capital son independientes del crecimiento monetario, es decir, el dinero es neutral en estado estacionario. Por otro lado, en el modelo desarrollado por De Gregorio (1993), las familias enfrentan un problema de maximización, en el cual la función de utilidad no incluye dinero, pero está presente en la restricción presupuestaria y los productores se rigen por una función AK que no incluye dinero, pero éste último se puede encontrar en la función objetivo (beneficios).

Aunque la formalización del dinero y la inflación dentro de los modelos de crecimiento es relevante, son de mayor importancia los aspectos conceptuales detrás de la modelación. En los primeros acercamientos al problema inflación-crecimiento prima la competencia perfecta, las expectativas racionales, el equilibrio general, y el supuesto que existe una relación lineal entre estas dos variables.[2] Por ejemplo, los trabajos de Mundell (1965) y Tobin (1965) predicen que existe una relación positiva entre inflación y tasa de acumulación del capital, basándose en la perfecta sustitución entre dinero y capital, de modo que un aumento en la tasa de inflación aumenta el costo de tener dinero, y la cambia distribución óptima de la riqueza de dinero a capital.

El cambio en la composición de la riqueza lleva a una mayor acumulación de capital y a una baja en la tasa de interés real y así, el aumento en la tasa de acumulación del capital conduce a una mayor tasa de crecimiento. Una de las mayores críticas al efecto Mundell–Tobin es que el dinero solo es visto como reserva de valor, y sus otras características no son tenidas en cuenta. Por su parte, Sidrauski (1967) propone un modelo con un agente representativo que vive infinitamente y demanda dinero como fuente de utilidad. En este tipo de modelos el dinero es neutral, pero en trabajos posteriores, Sidrauski mostró que la neutralidad es la excepción y no la regla, ya que la inflación puede llegar a reducir el acervo de capital de estado estacionario.

[1] La estabilidad macroeconómica se define como la situación en la cual las principales variables macroeconómicas (tasa de interés real, tipo de cambio real, inflación, déficit fiscal y balanza de pagos) se encuentran en niveles y tasas de crecimiento adecuadas.

[2] La relación lineal establece que para todo nivel de inflación el efecto que esta tiene sobre el crecimiento económico es negativo, mientras que la relación no lineal sugiere que para niveles bajos de inflación el efecto sobre el crecimiento económico es nulo, o incluso positivo, pero en niveles altos de inflación (especialmente en caso de hiperinflaciones) el efecto es negativo.

Otros trabajos que consideran el dinero y el capital como complementarios son el de Fischer (1983), quien utiliza el dinero como insumo en el proceso de producción y Stockman (1981) en donde el dinero es utilizado para comprar/adquirir bienes de capital. Por su parte, Turnovsky (1987) examina el impacto de un aumento permanente de la inflación dentro de un contexto de modelo de equilibrio general, incluyendo la optimización intertemporal en los agentes privados.

En general, en este tipo de modelos donde la economía no alcanza un estado de crecimiento permanente, la tasa de crecimiento del dinero no tendrá efecto alguno sobre la tasa de crecimiento del producto de estado estacionario. La única fuente de crecimiento es el aumento de la productividad, pero esta es una variable exógena que escapa a los alcances de cualquier política. Fue hasta que los desarrollos teóricos del crecimiento económico permitieron alcanzar de manera endógena un crecimiento permanente, que se pudieron incorporar los efectos de la inflación en el crecimiento de largo plazo.

Posteriormente, cuando la teoría del crecimiento mostró crecimiento auto sostenido y la relación entre inflación y crecimiento se supuso no lineal, surgen trabajos como los elaborados por Jones y Manuelli (1993), De Gregorio (1993), quienes utilizaron el esquema del crecimiento endógeno para determinar los efectos que tiene la inflación sobre el nivel y la tasa de crecimiento del producto per cápita en el largo plazo. Al suponer que la relación entre inflación y crecimiento económico es de tipo no lineal, tal como lo hacen Roubini y Sala–I-Martin (1992), Fischer (1993), Gosh y Phillips (1998), Khan y Senhadji (2000) y Khan (2001) se deja abierta la posibilidad de encontrar un punto de inflexión, en el cual la inflación deje de ser un beneficio y pase a ser perjudicial para el crecimiento de la economía.

Adicional a la discusión si la relación entre inflación y crecimiento es lineal o no lineal, también se debate cual es el canal por medio del cual se transmiten los efectos inflacionarios sobre el nivel y la tasa de crecimiento del PIB per cápita. En la literatura se ha identificado el canal *acumulación* o *inversión* el cual dice que la incertidumbre asociada a una alta y volátil inflación influye directamente sobre la tasa de retorno del capital y la inversión. De esta manera, la inflación hace estragos sobre la confianza de los inversionistas, de modo que se perjudica la inversión en diversas formas de capital, decisivos en el crecimiento económico.

Por su parte, el canal *eficiencia* indica que la inflación empeora el comportamiento de los mercados en el largo plazo al disminuir la productividad total de los factores. Altos niveles de inflación llevan a cambios en los precios que pueden ser costosos para los productores, y reduce el nivel óptimo de tenencia de efectivo de los consumidores. La distorsión de la información que trasmiten los precios, induce a los agentes económicos a dedicar más tiempo y recursos en obtener información y protegerse del daño provocado por la inestabilidad de precios, haciendo que la asignación eficiente de recursos se vea amenazada.

Por último, el canal *mercado financiero* predice que los efectos de la inflación sobre el crecimiento económico no son directos, sino que la inflación perjudica el desarrollo del mercado financiero y éste a su vez hace que se reduzca la tasa de crecimiento del producto. Dentro de este mecanismo se pueden nombrar diversos autores que hacen distintos y significativos aportes. McKinnon (1973) y Shaw (1973) defienden la búsqueda de un nivel estable de precios por parte de los países en desarrollo con el fin de inducir a intermediaciones financieras, en particular el desarrollo de contratos de largo plazo, y a partir de este punto alcanzar crecimiento económico. Roubini y Sala-I-Martin (1992) y Khan (2001) plantean trabajos donde la inflación limita el desarrollo de los mercados financieros y accionarios, pero dado que el impuesto inflacionario es una fuente de recursos gubernamentales, la autoridad monetaria no tiene incentivos para reducir la tasa de inflación.

Es claro que en los trabajos mencionados hasta el momento, se ha analizado la inflación como una condición cuando se tiene por objetivo el crecimiento económico, haciendo énfasis en los posibles efectos de la inflación sobre el nivel y la tasa de crecimiento del PIB per cápita. Sin embargo, el efecto que pueda tener el crecimiento sobre la inflación no se ha analizado suficientemente, haciendo que el anterior tipo de análisis sea de alguna manera incompleto. En este contexto, a nivel teórico se hace necesario un análisis de largo plazo que a la vez evalúe no solo los efectos de la inflación en el crecimiento, sino también dicha relación en sentido contrario.

Buscando complementar la literatura anterior, en el presente trabajo se analiza el tema de la relación entre crecimiento económico e inflación desde el punto de vista teórico, haciendo especial énfasis en el largo plazo. Para esto se presenta un modelo de crecimiento endógeno con tres sectores que producen bienes finales o de consumo, capital humano y tecnología, similar al desarrollado por Benavides y Gelves (2004). La inclusión de dinero en el análisis de productores y consumidores, y el hecho que éste reduce los costos de transacción del intercambio, conduce a que la demanda monetaria de cada uno de los agentes sea siempre positiva. De la solución del problema de maximización de consumidores y productores, se obtiene la demanda de dinero agregada, la cual es uno de los factores importantes en la determinación de la inflación.

En la sección 2 del documento se expone la formalización del modelo, analizando el problema de los productores y de los consumidores. A partir del modelo, en la sección 3 se presenta la relación dinámica entre crecimiento económico e inflación haciendo uso de la ecuación cuantitativa del dinero, para mostrar que la inflación depende del crecimiento económico, y no solo el crecimiento de la inflación, como generalmente se ha planteado hasta el momento. Se presenta un juego repetido entre los agentes *Banco Central Independiente* y *Gobierno*, los cuales tienen por objetivo mantener la estabilidad de precios y el crecimiento económico respectivamente. El juego tiene un Equilibrio de Nash en estrategias puras que analizado evolutivamente muestra que la estrategia intervenir-intervenir es evolutivamente estable lo cual implica que las autoridades fiscal y monetaria deben coordinar sus políticas con el fin de lograr un mayor beneficio para la economía. La cuarta parte corresponde a las conclusiones donde se muestran los principales resultados del modelo y del juego.

2. Aspectos Formales

Se considera un modelo de crecimiento endógeno con horizonte infinito de tiempo, en el cual interactúan dos tipos de agentes: firmas competitivas y consumidores. El supuesto de horizonte infinito de tiempo es razonable en la medida en que las generaciones están unidas por el altruismo, considerando así que los agentes del modelo son dinastías o familias. Las dos clases de agentes se enfrentan a un problema específico de maximización intertemporal, en donde tienen en cuenta las tenencias de dinero y su respectivo costo de oportunidad. Para los consumidores el dinero tiene valor intrínseco y lo incluyen en la función de utilidad, por su parte los productores lo utilizan como medio de pago para adquirir nuevos insumos, es decir, no lo incluyen en la función de producción, pero hace parte de la maximización dentro de la función objetivo Al resolver el problema de maximización, se encuentra la demanda de dinero de cada uno de los agentes, y la inflación a la que se enfrenta cada uno de los productores.

En síntesis, en el modelo el capital humano se produce con un único factor de producción que es capital humano, el cual se destina a reproducir capital humano o a producir bienes de tecnología. La tecnología se utiliza en la producción de bienes finales, los cuales se pueden consumir o invertir en la producción de más bienes finales.

Supuestos

1. Economía cerrada con tres sectores productivos: bienes finales, capital humano (conocimiento rival) y tecnología (conocimiento no rival).
2. El conocimiento tecnológico es un factor de producción con características de bien publico no puro, es decir, no rival y sujeto a exclusión.
3. Existen dos tipos de trabajo. El llamado *no calificado* que solamente se usa en la producción de bienes finales, y el calificado que se destina a producir capital humano y tecnología.
4. La función de producción de tecnología presenta rendimientos constantes a escala, y solamente utiliza capital humano (trabajo calificado) como factor de producción en forma lineal.
5. El dinero cumple las funciones de medio de cambio, reserva de valor y unidad de cuenta.
6. La posesión de dinero reduce los costos de las transacciones pero implica rendimientos decrecientes.
7. Se cumple la *Restricción Clower.* Una sencilla definición de esta restricción es que dinero compra bienes y bienes compran dinero, pero bienes no compran bienes.

2.1 Productores

2.1.1 Sector de Bienes Finales

El producto final Y es función del trabajo no calificado y la tecnología. La tecnología es considerada como un conjunto de bienes intermedios X_i disponibles al momento t, de modo que A varía cuando se crea un nuevo bien intermedio. Teniendo en cuenta que i representa el conjunto de bienes intermedios, y que se utiliza una cantidad fija de trabajo no calificado L_0, la función de producción de bienes finales se representa como

$$Y_t = L_0^{\beta} \int_{i=1}^{A} \left(X_i\right)^{1-\beta} di \tag{1}$$

Donde i es una variable continua. Los bienes intermedios entran en la función de producción como una función aditivamente separable, donde existe una única firma i por cada bien intermedio i. Tomando A constante, pero permitiendo mejoras en la calidad de cada bien intermedio y considerando que las distintas clases de bienes intermedios son sustitutos perfectos entre si, los nuevos bienes intermedios desplazan a los antiguos en un proceso llamado *Creative Destruction*, como el descrito por Aghion y Howitt (1992).

Para modelar este proceso, sea $\tilde{X}_i$ el nivel de calidad ajustado del i-ésimo bien intermedio. Se normaliza para que en el momento de ser inventado, cada bien tenga una calidad igual a uno, y aumente a través del tiempo de la forma $q, q^2, q^3, ..., q^{\kappa}$, donde κ es la calidad más alta posible. De tal manera, $\tilde{X}_i$ se define como

$$\tilde{X}_i = \int_{k=0}^{\kappa} q^{\kappa} X_{ik} \; dk \tag{2}$$

Teniendo en cuenta el ajuste de calidad, la ecuación (1) puede modificarse y reescribirse de la siguiente manera

$$Y_t = L_0^{\beta} \int_{i=1}^{A} \left(\tilde{X}_i\right)^{1-\beta} di \tag{3}$$

Al reemplazar (2) en (3) se obtiene que la función de producción de bienes finales se puede expresar como

$$Y_t = L_0^{\beta} \left[\int_{i=1}^{A} \int_{k=0}^{\kappa} \left(q^{\kappa} X_i\right) dk \right]^{1-\beta} di \tag{4}$$

Suponiendo A fijo, la ecuación (4) se convierte en

$$Y_t = L_0^{\beta} A \left(q^{\kappa} X_k\right)^{1-\beta} \tag{5}$$

Y al convertir (5) en términos per cápita, la función de producción de bienes finales se expresa de la forma

$$y_t = A q^{(1-\beta)\kappa} x^{1-\beta} \tag{6}$$

Donde $x = X / L$. A partir de la ecuación (5), se puede obtener la función inversa de la demanda del bien intermedio x

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = (1 - \beta) L^{\beta} q^{(1-\beta)\kappa} X_{\kappa}^{-\beta} = p_{\kappa} \tag{7}$$

Dado que los bienes intermedios están parcialmente sujetos a exclusión a través del sistema de patentes, los productores están en capacidad de imponer precios de monopolio, que para el caso sería[3]

$$p_{X_{\kappa}} = \frac{1}{1 - \beta} \tag{8}$$

Donde $1/(1-\beta) > 1 \;\; \forall \;\; \beta \in (0,1)$. De tal manera, la función de demanda puede escribirse en términos per cápita como

$$x_{\kappa} = (1 - \beta)^{2/\beta} A^{1/\beta} q^{(1-\beta)\kappa/\beta} \tag{9}$$

Diferenciando la ecuación (5) respecto a L se obtiene el producto marginal del trabajo no calificado en el sector de bienes finales, lo cual en equilibrio es igual al salario

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\beta}{L} L^{\beta} A (q^{\kappa} X_{\kappa})^{1-\beta} = \omega_1 = \beta y \tag{10}$$

En la ecuación (10) se puede ver que existe un efecto de escala. La productividad del trabajo es mayor a medida que la economía es más grande. Estos rendimientos crecientes en la producción de bienes finales se originan por el avance de la tecnología, es decir, la aparición de nuevos bienes intermedios no rivales, pero sujetos a exclusión.

[3] En el caso de una función de demanda de elasticidad constante, el precio se mantiene en proporción constante al costo marginal, cuya magnitud depende de la elasticidad de la demanda. Ver Varian (1992) Pág 278.

Específicamente, cada nuevo bien intermedio permite aumentar el nivel de producto sin necesidad de aumentar los costos en igual proporción, es decir, costos medios decrecientes para los productores de bienes finales. Este hecho garantiza el crecimiento sostenido en el largo plazo, pero impide la competencia perfecta (Benavides, 2001).

De otro lado, las firmas requieren dinero para adquirir nuevos recursos, bienes intermedios o equipos, siendo $i[1+s(m/i)]$ el costo de invertir i unidades, donde m denota los saldos monetarios reales per cápita, y s es decreciente y convexa, es decir, $s' < 0,\ s'' > 0$. Por lo tanto, la posesión de dinero reduce los costos de las transacciones pero implica rendimientos decrecientes. Cada productor maximiza el valor presente neto, menos el costo de oportunidad de las tenencias de saldos monetarios representado por $(r_Y + \pi_Y)m$, donde π_Y y r_Y son la tasa de inflación y la tasa de rentabilidad en el sector de bienes finales respectivamente. De esta manera, el problema de maximización al cual se enfrenta la firma productora de bienes finales es el siguiente:

$$\begin{aligned} Max \quad & \int_0^{\infty} \left\{ Aq^{(1-\beta)\kappa} x^{1-\beta} - i[1+s(m/i)] - m(r_Y + \pi_Y) - \dot{m} \right\} e^{-r_y t} \\ s.a \quad & \dot{x} = Aq^{(1-\beta)\kappa} x^{1-\beta} - c \end{aligned} \tag{11}$$

La restricción de la ecuación (11) indica que la variación de los insumos de producción será igual a la inversión que realice la firma. El hamiltoniano asociado al problema de maximización se plantea de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_Y = \left\{ Aq^{(1-\beta)\kappa} x^{1-\beta} - i[1+s(m/i)] - m(r_Y + \pi_Y) - \dot{m} \right\} e^{-r_Y t} + \lambda_Y \left(Aq^{(1-\beta)\kappa} x^{1-\beta} - c \right) \tag{12}$$

Al resolver el hamiltoniano se obtiene la demanda de dinero hecha por las firmas productoras de bienes finales $-s'(m/i) = r_Y + \pi_Y$, que expresado de otra manera puede escribirse como (Ver Apéndice Matemático)

$$m_y^d = \Gamma(r_Y + \pi_Y)\ i \tag{13}$$

Donde $\Gamma = -1/s' > 0$, dado que $s' < 0$, por tanto la demanda de dinero de los productores de bienes finales es positiva. De tal manera, la inflación asociada a este sector se representa como

$$\pi_Y = -[s'(m/i) + r_Y]$$

La expresión inmediatamente anterior podría prestarse a confusiones porque muestra una tasa de inflación negativa, pero dado que $s' < 0$, la nueva expresión para la inflación sectorial es:

$$\pi_Y = s'(m/i) - r_Y \tag{14}$$

La ecuación (14) muestra que la inflación del sector de bienes finales depende de la inversión hecha por las firmas (i), los saldos monetarios reales per cápita (m) y la tasa de rentabilidad asociada a dicho sector.

2.1.2 Sector de Capital Humano

Se define el capital humano como el conjunto de habilidades y conocimientos que poseen los trabajadores como resultado del aprendizaje. Dicho aprendizaje puede ser intencional, cuando el individuo dedica una fracción de su tiempo a la educación para aumentar sus capacidades productivas, o puede también ser accidental cuando el aumento de las habilidades es el resultado de la ejecución de las labores cotidianas.

Adicional al planteamiento sugerido por Lucas (1988) y Rebelo (1991), la acumulación intencional de capital humano es el resultado del equilibrio entre oferta y demanda. El mercado de capital humano se encuentra en equilibrio cuando el costo marginal de ofrecer estos servicios es igual a la valoración neta de quienes invierten en educación, es decir, a la diferencia del flujo de ingreso atribuible a la educación.[4] La ventaja de este tratamiento es que no solamente se tiene en cuenta el tiempo dedicado a estudiar, sino también los recursos utilizados en su producción, es decir, se consideran los costos directos e indirectos de la inversión en capital humano.

El capital humano $H(t)$ disponible en el momento t, que se destina a producir tecnología y a reproducir capital humano, se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(t) = \int_{i=1}^{L(t)} h_i(t) \quad di \tag{15}$$

Donde $L(t)$ es la oferta laboral dispuesta a capacitarse (número de personas) y $h(t)$ el nivel promedio de calificación de los trabajadores. Para un número fijo de $L(t)$, el crecimiento de $H(t)$ está dado únicamente por mejoras en la calificación promedio de los trabajadores, es decir, mayor capital humano per cápita, a lo cual se le conoce como profundización del capital humano. Por otro lado, si se considera fijo el nivel de calificación, el aumento de $H(t)$ se deberá a un incremento de el número de personas dispuestas a invertir en este sector, es decir, se daría una ampliación del capital humano, así como lo plantean Benavides y Forero (2002).

La función de producción de capital humano depende del mismo capital humano (profesores) y de capital físico (infraestructura física), pero se considera que es intensiva en capital humano, por lo tanto, la función de producción se reduce a la expresión

$$\dot{H} = BuH - H\delta_H \tag{16}$$

Donde B es un parámetro de eficiencia, $u \in [0,1]$ es la fracción del capital humano utilizado en la producción de capital humano y δ_H es la tasa de depreciación del capital humano[5]. La ecuación (16) puede reescribirse en términos per cápita de la siguiente forma (Ver Apéndice Matemático):

$$\dot{h} = Buh - h(\delta_H + n) \tag{17}$$

[4] Al considerar la acumulación de capital humano como fuente de crecimiento autosostenido, Lucas (1988) y Rebelo (1991) únicamente tienen en cuenta los costos directos de la educación, lo que se traduce en una tasa de retorno constante.

[5] La depreciación del capital humano puede interpretarse como pérdida de habilidades (muerte, enfermedad o jubilación) u obsolescencia generada por el avance de la tecnología.

Donde $h = H/L$. Al derivar la ecuación (16) con respecto a H se obtiene la rentabilidad de la inversión en capital humano, que en equilibrio es igual al costo directo de invertir en educación (valor de la matricula) o salario de los profesores

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial H} = Bu - \delta_H = \omega_2 \tag{18}$$

La condición de equilibrio del capital humano implica la igualación del costo directo de educarse (salario de los profesores o valor total de la matricula) durante el periodo que se hace la inversión con el valor presente de la diferencia entre flujos de ingresos laborales atribuibles a la inversión en capital humano. Este concepto se expresa de la siguiente manera

$$\omega_2(g - v)e^{\bar{r}(g-v)} = \int_g^f \omega_2(g)e^{-\bar{r}_H(f-g)}dt - \int_g^f \omega_1(g)e^{-\bar{r}_H(f-g)}dt - \int_v^g \omega_1(v)e^{-\bar{r}_H(g-v)}dt \tag{19}$$

El lado izquierdo de la igualdad representa el costo directo de invertir en educación, donde v es el momento en que el individuo está en capacidad de vincularse al mercado laboral o empieza a acumular capital humano, y g el momento en que cesa de acumular capital humano. El lado derecho representa los beneficios netos de educarse donde f es el momento en que termina la vida laboral y $\bar{r}$ es la tasa promedio de interés entre los momentos v, g y f. Al resolver las integrales y despejar r se obtiene (Ver Apéndice Matemático)

$$r_H^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{B_0(B_0 - 4\beta y)}}{2B_0} \tag{20}$$

Al derivar las dos raíces con respecto al producto per cápita, se obtienen los siguientes resultados

$$\frac{\partial r_H^+}{\partial y} < 0 \quad , \quad \frac{\partial r_H^-}{\partial y} > 0$$

El caso de la raíz con signo positivo significa que la tasa interna de retorno de la inversión en capital humano se reduce a medida que la economía crece. Por el contrario, cuando se toma la raíz de signo negativo, la rentabilidad de la inversión en capital humano es creciente a medida que la economía se expande, es decir que existen economías de escala en la producción de capital humano. Este resultado explica la gran diferencia de la inversión en educación entre países desarrollados y en vía de desarrollo. En los países desarrollados con un gran acervo de capital humano, a medida que se invierte en educación se obtiene mayor rentabilidad y se generan incentivos para continuar invirtiendo. Por el contrario, en los países en vía de desarrollo que tienen *stock* de capital humano considerablemente inferiores, se presenta el caso que las personas invierten cada vez menos en educación debido a que su rentabilidad es cada vez menor, y por tanto la acumulación de capital humano tiende a agotarse (Benavides, 2001).

Dado que los individuos invertirán en capital humano hasta el punto en que los beneficios netos de la inversión sean mayores a los costos, la sugerencia, al igual que Lucas (1988), es otorgar un subsidio que compense la disminución de la rentabilidad de dicha inversión. La magnitud del subsidio será igual al aumento de la productividad de los trabajadores no calificados.

Por otro lado, de manera análoga al sector de bienes finales, los productores de capital humano se enfrentan al problema:

$$\begin{gathered} Max \int_0^\infty \{Buh - h(\delta_H + n) - h[1 + z(m/h)] - m(r_H + \pi_H) - \dot{m}\}\, e^{-r_H t} \\ s.a\ \dot{h} = Buh - h(\delta_H + n) \end{gathered} \tag{21}$$

De donde se obtiene que el hamiltoniano asociado al problema de maximización es el siguiente:

$$\mathcal{H}_H = \{Buh - h(\delta_H + n) - h[1 + z(m/h)] - m(r_H + \pi_H) - \dot{m}\}\, e^{-r_H t} + \lambda_H [Buh - h(\delta_H + n)] \tag{22}$$

Al resolver el hamiltoniano, se obtiene la demanda de dinero por parte de los productores de capital humano, que se expresa de la forma $-z'(m/h) = r_H + \pi_H$, o también

$$m_H^d = \Phi(r_H + \pi_H)h \tag{23}$$

Donde $\Phi = -1/z' > 0$. De manera análoga al sector de bienes finales, inflación asociada al sector de capital humano es

$$\pi_H = z'(m/h) - r_H \tag{24}$$

La ecuación (24) muestra que la inflación del sector productor de capital humano depende de la inversión hecha por las firmas (h), los saldos monetarios reales per cápita (m) y la tasa de rentabilidad asociada a dicho sector. Sin embargo, la expresión r_H puede tomar distintos valores como se muestra en la ecuación (20), por tanto la inflación del sector dependerá si la economía tiene o no un gran acervo de capital humano.

2.1.3 Sector de Tecnología

El concepto de tecnología utilizado es similar al empleado por Romer (1990) y Aghion y Howitt (1992): la tecnología es un conjunto de bienes intermedios que implican variaciones en los métodos de producción o fabricación, que son el resultado de actividades de (I+D). Estos bienes intermedios pueden ser utilizados por una firma en distintos procesos y por varias firmas al mismo tiempo, es decir, la tecnología es un insumo no rival. Su uso como factor de producción genera no convexidades y por lo tanto, rendimientos crecientes.

Dado que los resultados de las actividades de (I+D) aumentan la capacidad productiva y se usan en más de un proceso productivo, se consideran un bien de capital nuevo cualitativamente distinto a los ya existentes. La producción de conocimiento tecnológico se realiza en mercados competitivos, pero está sujeta a exclusión parcial, implicando que quienes realizan la producción tienen poder de mercado y reciben rentas monopólicas. Esta exclusión genera estructuras de competencia imperfecta, es decir, de manera intencional se crea un mecanismo que garantiza la innovación tecnológica, que requiere capital humano para su producción. Para producir tecnología es necesaria una previa acumulación de capital humano y también que los *innovadores* respondan a los incentivos de mercado, pues de no ser así, no se destinarían recursos (capital humano) a esta actividad. Quien destina recursos a la producción de tecnología, tiene la ventaja que no solo recibe una remuneración *ordinaria* sino también cuasi rentas, ya que este es el mecanismo por medio del cual se garantiza la producción de nueva tecnología. Dicho esto, la producción de conocimiento tecnológico se puede expresar como:

$$\dot{A}(t) = a_0(1 - u)H - A\delta_A \qquad (25)$$

Donde a_0 es un parámetro de eficiencia históricamente dado, $(1 - u)$ la fracción de capital humano utilizado en la producción de tecnología y δ_A la tasa de depreciación. La ecuación (25) puede reescribirse en términos per cápita de la forma (Ver Apéndice Matemático):

$$\dot{a} = a_0(1 - u)h - a(\delta_A + n) \qquad (26)$$

Donde $h = H / L$. Al derivar la ecuación (26) respecto a h se obtiene la productividad del capital humano en la producción de tecnología, que en equilibrio es igual al salario de los investigadores empleados en el sector

$$\frac{\partial \dot{a}}{\partial h} = a_0(1 - u) = \omega_2 \qquad (27)$$

Al momento de inventar un nuevo bien intermedio el productor maximiza el valor presente neto que se expresa de la forma

$$a_{\circ}(1 - u) = (1 - \Theta)\int_t^{\infty} (p_{\kappa} - 1)\ x_{\kappa} e^{-\bar{r}(t)} dt \qquad (28)$$

El lado izquierdo de la ecuación (28) es el costo marginal de inventar el bien intermedio. La expresión $\int_t^{\infty} (p_{\kappa} - 1)\ x_{\kappa} e^{-\bar{r}(t)} dt$ es el valor presente de los flujos de ingreso futuro, donde p_{κ} es el precio de monopolio que el productor impone, y x es la cantidad demandada por los productores de bienes finales. La condición de equilibrio requiere igualdad entre el valor presente neto del flujo de ingresos futuros y el costo de inventar un nuevo bien intermedio. El término adicional Θ que multiplica el valor presente del flujo de ingresos futuro, es la probabilidad por unidad de tiempo que una innovación sea exitosa. De manera especifica, Θ se define como

$$\Theta_k = \Psi(1 - u)H \qquad (29)$$

La ecuación (29) define una distribución de Poisson en la cual la probabilidad por unidad de tiempo que Θ suceda depende en general del desempeño de los investigadores $(1 - u)H$. La probabilidad que un investigador haga una innovación de nivel κ está definida por una distribución de Poisson, con tasa de *aparición* de innovaciones de θ. Si $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_v$ son v distintos eventos definidos por distribuciones de Poisson independientes con tasas de *aparición* de innovaciones $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_v$ respectivamente, entonces la probabilidad que ocurra al menos uno de los eventos es exactamente igual a la suma de las v probabilidades independientes:

$$\sum_{i=1}^{v} \theta_i = v\theta = \Theta \qquad (30)$$

Reemplazando las ecuaciones (8), (9) y (30) en (28) se obtiene la siguiente expresión para la tasa de rentabilidad (Ver Apéndice Matemático)

$$r_A = (1-n\theta)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)(1-\beta)^{2/\beta} q^{(1-\beta)/\beta} \frac{1}{a_0(1-u)} \tag{31}$$

Donde (31) muestra el retorno esperado de hacer una innovación del tipo κ. De manera análoga al sector de bienes finales y de capital humano, los productores de tecnología se enfrentan al problema:

$$\begin{gathered} Max \int_0^\infty \{a_0(1-u)h - a(\delta_A + n) - a[1 + f(m/a)] - m(r_A + \pi_A) - \dot{m}\}\, e^{-r_A t} \\ s.a \quad \dot{a} = a_0(1-u)h - a(\delta_A + n) \end{gathered} \tag{32}$$

Por tanto el hamiltoniano asociado al problema de maximización es de la forma

$$\mathcal{H}_A = \{a_0(1-u)h - a(\delta_A + n) - a[1 + f(m/a)] - m(r_A + \pi_A) - \dot{m}\}e^{-r_A t} + \lambda_A [A_0(1-u)h - a(\delta_A + n)] \tag{33}$$

Y al resolverlo se obtiene la demanda de dinero hecha por las firmas productoras de tecnología expresada de la forma $-f(m/a) = r_A + \pi_A$ que puede reescribirse como

$$m_A^d = \Omega(r_A + \pi_A)a \tag{34}$$

Donde $\Omega = -1/f' > 0$, y por lo tanto, la inflación asociada al sector tecnológico es

$$\pi_A = f'(m/a) - r_A \tag{35}$$

La ecuación (35) muestra que la inflación del sector tecnología depende de la inversión (a), los saldos monetarios reales per cápita (m) y la tasa de rentabilidad asociada al sector. A diferencia del sector de capital humano, la tasa de rentabilidad de la producción de tecnología r_A presenta siempre valores positivos constantes con respecto al producto. Este sector se caracteriza por una estructura de mercado de competencia monopolística, sujeto a exclusión parcial, por lo tanto, se garantiza que los inversionistas tengan rentas monopólicas.

2.2 Consumidores

El proceso de maximización de utilidad de los consumidores es similar al desarrollado por Sidrauski (1967), con algunas modificaciones relacionadas con los sectores productivos, bienes finales, tecnología y capital humano. Igualmente se considera una forma funcional específica como la planteada por Roubini y Sala-I-Martin (1992). Por último para obtener la demanda de dinero de los consumidores, se utiliza el método propuesto por De Gregorio (1993).

Cada uno de los L consumidores de la economía busca maximizar su utilidad, que depende del consumo c y los saldos reales de dinero per cápita. El supuesto de horizonte infinito de tiempo es razonable en la medida en que las diferentes generaciones están unidas por el altruismo, y en que los agentes del modelo son dinastías o familias, siendo L_t el número de individuos pertenecientes a cada dinastía, como lo plantea Barro (1974). A pesar del altruismo, los padres prefieren el consumo propio al consumo de sus hijos, lo cual se ve reflejado en la tasa de descuento personal ρ de la función de utilidad intertemporal de la ecuación (36).

Como se mencionó anteriormente, m denota los saldos reales per cápita $m = M/LP$, y dado que la función de utilidad cumple las condiciones de concavidad $\partial U/\partial c, \partial U/\partial m > 0$ y $\partial^2 U/\partial c, \partial^2 U/\partial m < 0$ (utilidad marginal positiva pero decreciente), el problema de los consumidores se reduce a maximizar la siguiente función de utilidad intertemporal

$$Max \;\; U_t = \int_0^{\infty} u(c_t, m_t) \; e^{-(\rho - n).t} dt \tag{36}$$

Donde n es la tasa de crecimiento de la población, considerada exógena. La explicación tradicional de la inclusión de dinero en la función de utilidad es que facilita las transacciones, ya que hace innecesaria la doble coincidencia de deseos de los agentes involucrados en la transacción (Roubini y Sala-i-Martin, 1992). Esto significa que los consumidores valoran el dinero porque es un medio de cambio generalmente aceptado, ya que brinda la seguridad que cualquier otro agente estará dispuesto a cambiar dinero por bienes finales.

En general, el uso de dinero en una economía hace que desaparezca por completo el intercambio tipo bienes-bienes, y en su lugar se realizan transacciones dinero-bienes y bienes-dinero, haciendo que se cumpla la *Restricción Clower.* En este modelo se asume el cumplimiento de dicha restricción, implicando que la demanda de dinero de los consumidores será exactamente igual al valor de las transacciones planeadas para cada periodo, es decir, la demanda monetaria se hace solamente por motivo transacción, lo cual significa que los motivos especulación y precaución no son considerados en el presente trabajo.[6]

Por simplicidad se asume que la función de utilidad es aditivamente separable en el tiempo y logarítmica para c y m, por tanto la forma funcional específica es

$$U(c, m) = (1 - \mu)\ln(c_t) + \mu \ln(m_t) \tag{37}$$

Para deducir la restricción presupuestaria, se asume que el consumidor tiene su riqueza en forma de dinero o capital humano, y que la variación de la riqueza es igual a los ingresos (incluidas las transferencias del gobierno) menos el consumo, es decir

$$C + \dot{H} + \frac{\dot{M}}{P} = \omega L + r_H uH + r_A(1-u)H + D \tag{38}$$

Donde L es el tamaño de la población, C consumo, H *stock* de capital humano, M dinero nominal, D transferencias del gobierno, ω salario real, r_H la tasa de rentabilidad del capital humano en el sector de capital humano, r_A la tasa de rentabilidad del capital humano en el sector tecnología, y P nivel de precios.

Dado que primero, el dinero es considerado una forma de riqueza, segundo, está incluido en la función de utilidad, y tercero, los precios están expresados en unidades monetarias, se puede afirmar que en este modelo el dinero cumple sus tres principales funciones: medio de cambio generalmente aceptado, reserva de valor y unidad de cuenta.

---

[6] Para un análisis detallado ver Blanchard y Fischer (1989) pág 166.

Al dividir la restricción presupuestaria entre L (denotando las variables per capita con letras minúsculas, excepto m) y definir la riqueza total del consumidor como $W = H + M/P$, la ecuación (38) se reescribe como (Ver Apéndice Matemático)

$$\dot{w} = w\left[r_H u + r_A(1-u) - n\right] + \omega + d - \left[c + m\left(r_H u + r_A(1-u) + \pi\right)\right] \tag{39}$$

Donde π representa la tasa de inflación agregada. La ecuación (39) muestra el cambio de la riqueza como la diferencia entre el ingreso y el consumo, que está ahora definido por la suma de c y $m\left(r_H u + r_A(1-u) + \pi\right)$.[7] Este último término se interpreta como el costo de preferir dinero a cualquier forma capital, ya que se incluye el interés no captado, y el llamado impuesto inflacionario que reduce el poder adquisitivo del dinero. El problema de maximización del consumidor se resuelve al reemplazar (37) en (36) sujeto a (39), por lo tanto, el hamiltoniano correspondiente es el siguiente:

$$\mathcal{H} = \left[(1-\mu)\ln(c_t) + \mu\ln(m_t)\right] e^{-(\rho-n).t} + \lambda_c\left\{w\left[r_H u + r_A(1-u)\right] + \omega + d - \left[c + m\left(r_H u + r_A(1-u) + \pi\right)\right]\right\} \tag{40}$$

Al resolver el hamiltoniano se obtiene la tasa de crecimiento del consumo que se define como (Ver Apéndice Matemático)

$$\frac{\dot{c}}{c} = r_H u + r_A(1-u) - \rho \tag{41}$$

E igualando la utilidad marginal de dinero y consumo se llega a que la demanda monetaria de los consumidores es

$$m_c^d = \frac{\mu c}{(1-\mu)\left[r_H u + r_A(1-u) + \pi\right]} \tag{42}$$

La expresión definitiva para la tasa de crecimiento del producto en estado estacionario se obtiene al reemplazar r_H y r_A en $\dot{c}/c$. Para el caso de r_A, ésta tasa será positiva y constante al garantizar que los inversionistas tengan rentas monopólicas, y dado que en el sector se presenta un mercado competitivo sujeto a exclusión parcial, se cumple dicho requisito. Para el caso de r_H, si la inversión en capital humano es decreciente a medida que la economía se expande, es de esperar que el gobierno otorgue subsidios que compensen la disminución de la rentabilidad de tal inversión, ya que busca el crecimiento económico. Por el contrario, si la inversión en capital humano es creciente, no habrá ningún problema porque la inversión en capital humano estará garantizada. Cumplidos estos requisitos sobre las tasas de rentabilidad de la inversión en capital humano y tecnología, la tasa de crecimiento económico en estado estacionario será positiva.

3. Análisis Dinámico entre Crecimiento Económico e Inflación

Los resultados presentados en la sección anterior permiten plantear un juego en el que se relacionan los resultados de crecimiento e inflación. Específicamente, se muestra que a partir de las decisiones de maximización en cada uno de los sectores es posible determinar la inflación en términos de la tasa de crecimiento. En particular, a partir de la demanda de dinero se encuentran las inflaciones sectoriales que permiten calcular la inflación total.

[7] Ver Blanchard y Fischer (1989) pág 189.

3.1 Dinero y Crecimiento Económico

Teniendo en cuenta la ecuación cuantitativa del dinero se pueden obtener resultados muy interesantes. Siendo dicha ecuación de la forma $MV = PY$, donde V es la velocidad del dinero, y al suponerla constante, se obtiene la expresión $\dot{M}/M = \pi + \dot{Y}/Y$, por tanto, la inflación es expresada como

$$\pi = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{Y}}{Y} \tag{43}$$

Por definición $y = Y/L$, implicando que la tasa de crecimiento del producto per cápita es igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento del producto total y la tasa de crecimiento poblacional

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - n \tag{44}$$

Para obtener una expresión más precisa de la inflación, es necesario despejar $\dot{Y}/Y$ de la ecuación (44) y reemplazar en (43), por lo tanto π se expresa de la forma

$$\pi = \frac{\dot{M}}{M} - \left(\gamma_y^* + n\right) \tag{45}$$

Donde γ_y^* es la tasa de crecimiento del producto per cápita ($\dot{y}/y$), o lo que es lo mismo, la tasa de crecimiento del consumo $\dot{c}/c$. La ecuación (45) significa que la inflación no solamente se debe a la tasa de variación de la cantidad de dinero en la economía, sino también a la tasa de crecimiento del producto, es decir, de la tasa de crecimiento poblacional y del producto per cápita. Contrario a lo que se suponía en la gran mayoría de estudios previos, la inflación depende del crecimiento económico, y no es una condición de estabilidad macroeconómica para alcanzar el crecimiento: es una variable resultado del proceso de crecimiento y no un requisito para el mismo. Este resultado se observa debido a que el crecimiento del producto implica que los productores demandan una mayor cantidad de bienes intermedios, para lo cual requieren una cantidad mayor de dinero, que suponiendo una oferta monetaria constante, genera un incremento en el nivel general de precios, es decir, una mayor tasa de inflación.

Por simplicidad, generalmente se asume que en el largo plazo la tasa de crecimiento del producto agregado $\dot{Y}/Y$ es igual a cero, lo que implica que para este caso específico, la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero en la economía es exactamente igual a la inflación. Sin embargo, en este modelo se demostró que $\dot{Y}/Y$ es mayor que cero (dado que $\dot{y}/y$ y n son positivos), por lo tanto el dinero tiene efectos reales y no solamente genera efectos sobre el nivel de precios, como se observa en la ecuación (45).[8] El supuesto que la tasa de crecimiento del producto agregado es positiva en el largo plazo, está totalmente de acuerdo con la Teoría del Crecimiento Endógeno que busca dar una justificación satisfactoria a este hecho.

[8] En otras palabras, el dinero no es neutral en el largo plazo.

3.2 Un Juego de Crecimiento Económico e Inflación

El ejercicio propuesto en esta sección, es un juego con dos jugadores y dos estrategias para cada uno de ellos (2x2), como se muestra en la Figura 1. El Gobierno (Jugador 1) y el Banco Central Independiente (Jugador 2) deben elegir entre intervenir la economía o simplemente adoptar un rol pasivo y no hacerlo. Cada jugador dirige la estrategia de intervenir en la economía según su principal objetivo: para el caso del gobierno, que busca maximizar el crecimiento económico, la estrategia es una política fiscal expansiva financiada con impuestos, mientras que el Banco Central busca minimizar la inflación y por lo tanto, su intervención consiste en realizar una política monetaria contractiva. Cabe aclarar que este juego tiene lugar en una situación en la cual el gobierno tenga incentivos para intervenir en la economía, es decir, el caso en que la tasa de rentabilidad de la inversión en capital humano es decreciente.

Los pagos respectivos para los jugadores 1 y 2 son una tasa de crecimiento del producto per cápita, y una tasa de inflación, según como se expresa esta última en la ecuación (45). En la sección 2 se hallaron distintas tasas de inflación en cada uno de los sectores productivos, pero la inflación objetivo del Banco Central Independiente es aquella a la cual se enfrentan los consumidores, es decir, la inflación total de la economía, que expresa como el promedio simple de las inflaciones sectoriales.

$$\pi = \frac{\pi_Y + \pi_H + \pi_A}{3} \tag{46}$$

En el juego entre el Gobierno y el Banco Central, el juego queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llccc} & & & \multicolumn{2}{c}{\text{Banco}} \\ & & & \text{No} & \text{Si} \\ \text{Gobierno} & No & [\mathrm{X}] & \gamma_1^*, \pi_1 & \gamma_2^*, \pi_2 \\ & Si & [1-\mathrm{X}] & \gamma_3^*, \pi_4 & \gamma_4^*, \pi_4 \end{array}$$

Por simetría $\gamma_3^* = \pi_2 ; \gamma_2^* = \pi_3$ y adicionalmente $\gamma_3^* > \gamma_1^*$ y $\pi_1 > \pi_2$. De tal manera, el equilibrio de Nash en estrategias puras es la combinación de estrategias de política fiscal expansiva financiada con impuestos y política monetaria contractiva, que equivale a los pagos γ_4^*, π_4 para el Gobierno y $\left(\dot{M}/M\right)$-$\left(\gamma_{y_4^c}^* + n\right)$ para el Banco Central Independiente. El análisis de estabilidad evolutiva se puede plantear en términos generales de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llccc} & & & \multicolumn{2}{c}{\text{Banco}} \\ & & & \text{No} & \text{Si} \\ \text{Gobierno} & No & [\mathrm{X}] & a, a & b, c \\ & Si & [1-\mathrm{X}] & c, b & d, d \end{array}$$

Las utilidades esperadas para cada una de las políticas, asumiendo simetría en el juego, son las siguientes:

$$u[no] = \mathrm{X}(a) + [1-\mathrm{X}](b)$$
$$u[si] = \mathrm{X}(c) + [1-\mathrm{X}](d)$$
$$\overline{u} = \mathrm{X}[u(no)] + [1-\mathrm{X}]u(si)$$

La dinámica del replicador se define como:

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{X}[u(si) - \overline{u}]$$
$$= \mathrm{X}[\mathrm{X}(c) + (1-\mathrm{X})(d)] - \mathrm{X}(u(no)) + (1-\mathrm{X})u(no)]$$
$$= \mathrm{X}[1-\mathrm{X}]\mathrm{X}(a-c) + [1-\mathrm{X}](b-d)$$

En el juego entre el Gobierno y el Banco Central, el juego queda definido de la siguiente manera:

			Banco	
			No	*Si*
Gobierno	*No*	$[\mathrm{X}]$	γ_1^*, π_1	γ_2^*, π_2
	Si	$[1-\mathrm{X}]$	γ_3^*, π_4	γ_4^*, π_4

Por simetría $\gamma_3^* = \pi_2; \gamma_2^* = \pi_3$ y adicionalmente $\gamma_3^* > \gamma_1^*$ y $\pi_1 > \pi_2$. Con estos valores, los únicos valores que igualan la dinámica del replicador son $x = 0$ y $x = 1$. Siendo ésta última la estrategia evolutivamente estable.

4. Conclusiones

En este documento se desarrolló un modelo de crecimiento endógeno de tres sectores, bienes finales, capital humano y tecnología. Así mismo existen tres factores de producción, trabajo, capital humano y tecnología en forma de nuevos bienes intermedios, o mejoramiento de la calidad de tales bienes intermedios. Los productores utilizan el dinero como medio de pago para adquirir nuevos insumos. Del análisis de los productores se obtuvo la tasa de crecimiento de cada uno de los factores y por lo tanto del producto, para concluir que el crecimiento del producto per cápita en estado estacionario se determina por la rentabilidad de las inversiones en capital humano y tecnología. Este resultado, al igual que el obtenido en los demás modelos de crecimiento endógeno, muestra que en el largo plazo el crecimiento de la economía es positivo.

En particular se muestra que el resultado puede ser mejorado con una política fiscal que tienda a otorgar subsidios a la acumulación de capital humano, lo cual muestra que la intervención del gobierno aumenta la tasa de crecimiento al evitar la tendencia decreciente de la rentabilidad en capital humano. Específicamente se mostró que la rentabilidad del capital humano puede presentar dos valores, que determinan dos tendencias a lo largo del tiempo, y también dos políticas a seguir con el propósito de garantizar el crecimiento sostenido de la economía. Para aquellos países en los que el capital humano es escaso, su rentabilidad es decreciente con respecto al nivel de producto, y análogamente para aquellos países con abundante capital humano, la tasa interna de retorno es creciente. Para el primer caso, la intervención del Estado mediante el otorgamiento de subsidios a la educación financiados con impuestos elimina la tendencia decreciente de la inversión en capital humano, lo que mejora la tasa de crecimiento de largo plazo. En el segundo caso, no es necesaria la intervención estatal, pues el Mercado se encarga de asignar eficientemente los recursos.

En relación con el análisis de los consumidores, se incluyó el dinero como argumento de la función de utilidad. El análisis conjunto de productores y consumidores hizo posible hallar la tasa de crecimiento de la economía en el largo plazo, lo que unido a la demanda de dinero de cada uno de los agentes, permitió calcular la tasa de inflación agregada de la economía, que a su vez, junto con la ecuación cuantitativa del dinero, permitió mostrar la relación dinámica entre crecimiento económico e inflación. Este resultado mostró que existe una relación entre la tasa de crecimiento del producto y el nivel de inflación, y no solo en sentido contrario como usualmente se señala. Específicamente, se encontró que en el largo plazo la inflación no es un fenómeno exclusivamente monetario, sino que su nivel depende de manera directa del crecimiento del producto.

Este resultado es la consecuencia directa de considerar que en los modelos de crecimiento endógeno el crecimiento del producto es positivo y determinado por la política fiscal. Este hecho determina que en estado estacionario la tasa de crecimiento del dinero no se traduzca únicamente en inflación dado que el nivel de producto no es constante, más aún, la tasa de crecimiento del producto determina la inflación. El análisis dinámico mostró que la relación entre crecimiento e inflación es de doble vía y no solo de inflación a crecimiento, lo que contrasta con los trabajos señalados en el marco teórico. El resultado del juego mostró que de acuerdo con los objetivos de cada uno de los jugadores o agentes, el equilibrio de Nash fue intervención económica para cada una de las autoridades.

Por último, el análisis de estabilidad evolutiva mostró que la estrategia política fiscal expansiva financiada con impuestos y política monetaria contractiva constituyen el equilibrio de Nash del juego y una estrategia evolutivamente estable. En particular, se muestra que la política fiscal puede ayudar a mejorar el crecimiento económico de estado estacionario en países que experimentan baja acumulación de capital humano. Igualmente, los resultados sugieren que el banco central independiente debe adoptar una política monetaria contractiva para reducir la inflación. En síntesis, las relaciones dinámicas entre crecimiento e inflación muestran la necesidad de intervención tanto del banco central independiente como del gobierno, que puede mejorar sustancialmente el crecimiento, aunque éste genere efectos inflacionarios.

Apéndice Matemático

<u>Sector de Bienes Finales</u>

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial H_Y}{\partial i} = -\dot{\lambda}_Y \qquad\qquad \frac{\partial H_Y}{\partial m} = \left[- s'(m/i) - \left(r_Y + \pi_Y\right)\right] \, e^{-\mathrm{rY}.t} = 0$$

Sector de Capital Humano

$$\frac{\dot{H}}{L} = Buh - h\delta_H \qquad \text{donde} \qquad h = H/L$$

$$h = \frac{H}{L} \quad \rightarrow \quad \dot{h} = \frac{\dot{H}L}{L^2} - \frac{H\dot{L}}{L^2} \quad \rightarrow \quad \dot{h} = \frac{\dot{H}}{L} - hn \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{H}}{L} = \dot{h} + hn$$

Al reemplazar $\dot{H}/L$ en la función de producción per cápita, se obtiene la expresión de la ecuación (17).

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial H_H}{\partial h} = -\dot{\lambda}_H \qquad \qquad \frac{\partial H_H}{\partial m} = \left[- z'(m/h) - (r_H + \pi_H)\right] \; e^{-r_H t} = 0$$

Partiendo de la ecuación (19) se tiene que

$$\omega_2(g - v)e^{\bar{r}(g-v)} = \int_g^f [\omega_2(g) - \omega_1(g)] \; e^{-\bar{r}_H(f-g)}dt - \int_v^g \omega_1(v)e^{-\bar{r}_H(g-v)}dt$$

Reemplazando $\omega_1 = \beta \; y$ y $\omega_2 = Bu - \delta_H = B_0$ la ecuación anterior se expresa como

$$B_0(g - v)e^{\bar{r}(g-v)} = \int_g^f [B_0 - \beta y] \; e^{-\bar{r}_H(f-g)}dt - \int_v^g \beta y(v)e^{-\bar{r}_H(g-v)}dt$$

Para llegar al resultado de la ecuación (20) se asume que la inversión se hace solamente en un periodo[9] y que, como se mencionó anteriormente, las distintas generaciones están unidas por el altruismo, por tanto la vida laboral es suficientemente larga para maximizar con horizonte infinito de tiempo.

Sector de Tecnología

$$\frac{\dot{A}}{L} = A_0(1-u)h - a\delta_A \qquad \text{donde} \qquad a = A/L$$

$$a = \frac{A}{L} \quad \rightarrow \quad \dot{a} = \frac{\dot{A}L}{L^2} - \frac{\dot{L}A}{L^2} \quad \rightarrow \quad \dot{a} = \frac{\dot{A}}{L} - an \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{A}}{L} = \dot{a} + an$$

Al reemplazar $\dot{A}/L$ en la función de producción per cápita, se obtiene la expresión de la ecuación (26).

Las condiciones de primer orden son:

[9] De manera que el lado izquierdo de la ecuación se reduce a B_0

$$\frac{\partial H_A}{\partial a} = -\dot{\lambda}_A \quad \text{y} \quad \frac{\partial H_A}{\partial m} = \left[-f'(m/a) - (r_A + \pi_A)\right] \; e^{-\mathrm{r_A} t} = 0$$

Reemplazando las ecuaciones (8), (9) y (30) en (28) se obtiene la expresión

$$a_0(1-u) = (1-\nu\theta)\int_t^{\infty}\left(\frac{1}{1-\beta}-1\right)(1-\beta)^{2/\beta} A^{1/\beta} q^{(1-\beta)\kappa/\beta} e^{-\bar{r}(t)} dt$$

$$a_0(1-u) = (1-\nu\theta)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)(1-\beta)^{2/\beta} A^{1/\beta} q^{(1-\beta)\kappa/\beta}\int_t^{\infty} e^{-\bar{r}(t)} dt$$

Al resolver la integral se tiene que

$$a_0(1-u) = (1-\nu\theta)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)(1-\beta)^{2/\beta} A^{1/\beta} q^{(1-\beta)\kappa/\beta} \frac{1}{r}$$

De donde al despejar r se obtiene la ecuación (31)

<u>Consumidores</u>

Restricción Presupuestaria

$$C_t + \dot{H} + \frac{\dot{M}}{P} = \omega L + r_H uH + r_A(1-u)H + D$$

divide entre L

$$c + \frac{\dot{H}}{L} + \frac{\dot{M}}{PL} = \omega + r_H uh + r_A(1-u)h + d$$

Sabiendo que $m = \dfrac{M}{LP}$, entonces

$$\dot{m} = \frac{\dot{M}LP}{L^2P^2} - \frac{M(\dot{L}P + \dot{P}L)}{L^2P^2} \;\rightarrow\; \dot{m} = \frac{\dot{M}}{LP} - \frac{M\dot{L}P}{L^2P^2} - \frac{M\dot{P}L}{L^2P^2} \;\rightarrow\; \dot{m} = \frac{\dot{M}}{LP} - nm - m\pi$$

$$\rightarrow \quad \frac{\dot{M}}{LP} = \dot{m} + m(\pi + n)$$

Reemplaza $\dot{M}/LP$ y $\dot{H}/L$ en la restricción per cápita

$$c + \dot{h} + nh + \dot{m} + m(\pi + n) = \omega + r_H uh + r_A(1-u)h + d$$

Siendo W la riqueza expresada de la forma $W = H + M/P$ se divide entre L para convertir en términos per cápita

$$w = h + m \;\rightarrow\; \dot{w} = \dot{h} + \dot{m}$$

Al reagrupar la restricción se obtiene que

$$\dot{w} = \omega + r_H uh + r_A(1-u)h + d - c - nh - m(\pi + n)$$

Sabiendo que $h = w - m$ se tiene que

$$\dot{w} = \omega + r_H u(w-m) + r_A(1-u)(w-m) + d - c - n(w-m) - m(\pi + n)$$
$$\dot{w} = \omega + r_H uw - r_H um + r_A(1-u)w - r_A(1-u)m + d - c - nw + nm - m\pi - nm$$

Y finalmente, al reagrupar se obtiene la restricción de la ecuación (39).

Las condiciones de primer orden son

- $\dfrac{\partial H}{\partial c} = \dfrac{(1-\mu)}{c} e^{-(\rho-n).t} = \lambda_c$

Aplicando logaritmo natural $\qquad \ln(1-\mu) - \ln(c) - (\rho - n).t = \ln \lambda_c$

Deriva respecto al tiempo $\qquad -\dfrac{\dot{c}}{\mathrm{c}} - \rho + n = \dfrac{\dot{\lambda}_c}{\lambda_c}$

- $\dfrac{\partial H}{\partial w} = \lambda_c\left[r_H + r_A(1-u) - n\right] = -\dot{\lambda}_c : \qquad \dfrac{\dot{\lambda}_c}{\lambda_c} = -\left[r_H u + r_A(1-u) - n\right]$

- $\dfrac{\partial H}{\partial m} = \dfrac{\mu}{m} e^{-(\rho-n).t} = \lambda_c\left[r_H u + r_A(1-u) + \pi\right] \; : \; \lambda_c = \dfrac{\mu}{m\left[r_H u + r_A(1-u) + \pi\right]} e^{-(\rho-n).t}$

Iguala $\dfrac{\dot{\lambda}_c}{\lambda_c}$: $\qquad \dfrac{\dot{c}}{c} + \rho - n = r_H u + r_A(1-u) - n$

De donde se obtiene la tasa de crecimiento del consumo. Así mismo, iguala λ_c (utilidades marginales del consumo y el dinero)

$$\frac{\mu}{m\left[r_H u + r_A(1-u) + \pi\right]} e^{-(\rho-n).t} = \frac{(1-\mu)}{c} e^{-(\rho-n).t}$$

Referencias

AGÉNOR, P. y P. Montiel. (2000): "Estabilización de la Inflación y Crecimiento Económico" en *La Macroeconomía del Desarrollo,* Fondo de Cultura Económica.

AGHION, P. y P. Howitt. (1992): *A Model of Growth through Creative Destruction,* en Econométrica, Vol. 60, Issue 2, Páginas 323 – 351.

BARRO, R. (1990): *Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth*, en The Journal of Political Economy, Vol. 98, No. 5, Páginas 103 – 125.

BARRO, R. (1974): *Are Government Bonds Net Wealth*, en The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 6, Páginas 1095 – 1117.

BENAVIDES, O. (1.997): *La Economía Política y la Económica Matemática de la Teoría del Crecimiento Endógeno*, en Cuadernos de Economía, No. 26, Universidad Nacional de Colombia.

BENAVIDES, O y Forero, C. (2002): *Crecimiento Endógeno: Conocimiento y Patentes*, en Revista de Economía Institucional, Vol.4 No. 6 Páginas 109-131.

BENAVIDES, O. y A. Gelves. (2004): *Human Capital and Technological Change in a Real Model of Endogenous Growth,* Working Paper, Unidad de Estudios en Interacciones Económicas.

BENIGNO, P.y M. Woodford. (2003): *Optimal Monetary and Fiscal Policy: A Linear-Quadratic Approach*, en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 9905.

BLANCHARD, O. y S. Fischer. (1989): “Money” en *Lectures on Macroeconomics,* MIT Press.

CHIANG, A. (1992): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática,* McGraw Hill, Tercera Edición, Páginas 190 -195 y 653 - 659.

COMIN, D. y B. Hobijn. (2004): *Neoclassical Growth and the Adoption of Technologies*, en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 10733.

CUEVAS, H. (2003): *Towards a Renovated Theory of Classical Growth*, en Colombian Economic Journal, No. 1, Páginas 223 – 244.

DE GREGORIO, J. (1993): *Inflation, Taxation, and Long-Run growth* en Journal of Monetary Economics 31, Páginas 271 – 298.

DE GREGORIO, J. (1996): *Inflation, Growth, and Central Banks. Theory and Evidence,* en The World Bank Policy Research, Working Paper No. 1575.

FERNANDEZ, A. y L. Rodríguez (1999): “Los mecanismos de Transmisión de los Efectos de la Política Monetaria”, en *Política Monetaria: su Eficacia y Enfoques Alternativos*, Editorial AC.

FISCHER, S. (1983): *Inflation and Growth,* en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 1235.

FISCHER, S. (1993): *The role of Macroeconomic factors in growth*, en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 4565.

GARDNER, R. (1995): “Estabilidad Evolutiva y Racionalidad Acotada” en *Juegos para Empresarios y Economistas,* Antoni Bosch Editor.

GHOSH, A. y S. Phillips. (1998): *Inflation, Desinflation and Growth*, en Fondo Monetario Internacional, Working Paper 98/68.

JONES, L. y R. Manuelli. (1993): *Growth and the Effects of Inflation,* en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 4523.

KEHEO, P. y V. Chari. (1999): *Optimal Fiscal and Monetary Policy,* en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 6891.

KHAN, M. (2001): *Inflation, Financial Deepening, and Economic Growth*, presentado en la Conferencia del Banco de México sobre Estabilidad Macroeconómica, Mercados Financieros y Desarrollo Económico, México, D.F., Noviembre 12 – 13.

KHAN, M. y A. Senhadji. (2000): *Threshold Effects in the relationship between Inflation and Growth*, en Fondo Monetario Internacional, Working Paper 00/110.

KLENOW, P. y A. Rodriguez-Clare. (2004*): Externalities and Growth*, en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 11009.

LUCAS, R. (1988): *On the Mechanics of Economic Development*, en Journal of Monetary Economics, Vol. 22.

MANKIW, G. y M. Weinzierl (2004): *Dynamic Scoring: A Back of the Envelope Guide*, Harvard University.

McKINNON, R. (1973): *Money and Capital in Economic Development*, Washington D.C, Brookings Institution.

MUNDELL, R. (1965): *Growth, Stability and Inflationary Finance*, en Journal of Political Economy*,* 73.

PERSSON, M; T. Persson y L. Svensson. (2005): *Time Consistency of Fiscal and Monetary Policy,* en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 11088.

REBELO, S. (1991): *Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth,* en The Journal of Political Economy, Vol. 99, No. 3, Páginas 500 – 521.

ROMER, P. (1990): *Endogenous Technological Change*, en The Journal of Political Economy, Vol. 98, Issue 5, Páginas 71 – 102.

ROUBINI, N. y X. Sala–i-Martin. (1992): *A Growth Model of Inflation, Tax Evasion, and Financial Repression,* en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 4062.

SALA-I-MARTIN, X. (2000): *Notas sobre Crecimiento Económico,* Segunda Edición, Antoni Bosch.

SCHMITT, S. y M. Uribe. (2003): *Optimal Fiscal and Monetary Policy under Imperfect Competition,* en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 10149.

SHAW, E. (1973): *Financial Deepening in Economic Development,* New York, Oxford University Press.

SIDRAUSKY, M. (1967): *Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy,* en American Economic Review Papers and Proceedings, Páginas 534 - 544.

SOLOW, R. (1956): *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, en Quaterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1, Páginas 65 - 94.

STOCKMAN, A. (1981): *Anticipated Inflation and the Capital Stock in Cash-in-Advance Economy*, Journal of Monetary Economics, No. 8, Páginas 387 – 393.

TOBIN, J. (1965): *Money and Economic Growth*, en Econométrica, 33: 671-684.

TURNOVSKY, S. (1987): *Monetary Growth, Inflation, and Economic Activity in a Dynamic Macro Model*, en National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 2133.

VARIAN, Hal (1992): *Análisis Microeconómico,* Antoni Bosch Editor, Tercera Edición.