

Regulación y Valor en Riesgo

Por:  
Luis Fernando Melo Velandia  
Joan Camilo Granados Castro

Núm. 615  
2010

# Borradores de ECONOMÍA



ta - Colombia - Bogotá - Col

## REGULACIÓN Y VALOR EN RIESGO

**LUIS FERNANDO MELO VELANDIA**

(lmelevel@banrep.gov.co)

**JOAN CAMILO GRANADOS CASTRO**

(jgranaca@banrep.gov.co)

**RESUMEN.** En este trabajo se analizan algunos aspectos de la regulación relacionada con el manejo del riesgo de mercado establecida por la Superintendencia Financiera de Colombia, donde se propone el valor en riesgo (*VaR*) como la medida para cuantificar este tipo de riesgo. No obstante, esta regulación omite aspectos relevantes sobre el cálculo del *VaR*. A pesar de que la Superintendencia Financiera sugiere el uso de la regla de la raíz para el cálculo del *VaR* en multiperiodos con base en el *VaR* para un día, la validez de dicha regla no es clara. Por otra parte, las pruebas de desempeño (*backtesting*) pretenden validar si la metodología utilizada para el cálculo de *VaR* es correcta. Sin embargo, la regulación actual solo hace referencia al número de veces que las pérdidas exceden el *VaR*, olvidándose de otros factores que son necesarios para la evaluación del desempeño de estas medidas.

Para llevar a cabo los análisis relacionados con los efectos de la regla de la raíz y de diferentes metodologías de *backtesting* que evalúen todas las propiedades relevantes del *VaR*, este documento calcula dos medidas de riesgo, el *VaR* y el *VaR* condicional, utilizando metodologías de fácil implementación (RiskMetrics<sup>®</sup>, ARMA-GARCH, simulación histórica, simulación histórica filtrada y normalidad) para la Tasa Representativa del Mercado, los TES, y el IGBC con un periodo muestral comprendido entre enero de 2003 y marzo de 2010. Los resultados muestran que para horizontes de pronóstico de un día las metodologías consideradas miden apropiadamente el *VaR*. Los métodos con mejor desempeño son aquellos que modelan tanto la media como la varianza condicional. Por otro lado, para horizontes mayores a un día ninguna metodología tiene un desempeño adecuado. En particular, se encuentra que la regla de la raíz no genera estimaciones apropiadas del *VaR* multiperiodo. Es importante anotar que si solo se consideran los criterios de la regulación vigente, se tendrían algunos modelos adecuados para estimaciones multiperiodo. Sin embargo, cuando se tienen en cuenta supuestos adicionales que debe satisfacer el *VaR*, ninguna metodología es apropiada.

*Palabras claves.* Valor en riesgo, valor en riesgo condicional, *backtesting*, riesgo de mercado, regulación financiera.

*Códigos de clasificación JEL.* C32, C52, G10, G28.

---

\* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva.

## 1. INTRODUCCIÓN

A partir de las recomendaciones del comité de supervisión bancaria de Basilea realizadas en 1988, las entidades reguladoras de mercados financieros acogieron al Valor en Riesgo como una medida estándar de riesgo de mercado. De igual forma, la regulación colombiana ha acogido esta medida y ha impuesto su medición por parte de entidades bancarias para determinar el monto de capital de reserva requerido para cubrir los riesgos percibidos en el mercado.

El Valor en Riesgo,  $Var_{t|t-k}^{\alpha}$ , corresponde a la mínima pérdida esperada en el  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de los peores casos, con la información disponible hasta  $t - k$ , donde  $k$  es el horizonte de pronóstico o el periodo de tenencia del activo sobre el cual se calcula el  $VaR$ . El Valor en Riesgo se estima, por lo general, como el  $\alpha$ -ésimo cuantil de la distribución futura de las pérdidas y ganancias del activo. Esta medida puede ser utilizada en varios contextos; por ejemplo, en el caso de las entidades financieras, tiene implicaciones sobre la determinación de los requerimientos de capital exigidos por ley para cubrir el riesgo de mercado.

Así, dada la importancia y el amplio uso de esta medida, se han desarrollado diversos métodos para su estimación. Cada uno tiene distintos supuestos sobre la distribución de los retornos de los activos y pretende modelar diversos hechos estilizados de estas series.

La regulación actual presenta dos alternativas para la estimación del Valor en Riesgo. La primera alternativa corresponde a una metodología estándar de estimación de esta medida, realizada por el ente regulador. Dicha metodología se basa en diversos componentes de riesgo para un portafolio que son sumados para determinar los requerimientos de capital. Por otro lado, en la segunda alternativa se considera la realización de modelos estadísticos por parte de las entidades reguladas, esta se conoce como aproximaciones de modelos internos (IMA por sus siglas en inglés).

No obstante, pese a la posibilidad de que cada entidad lleve a cabo estimaciones por medio de las metodologías que considere adecuadas, existen unos requisitos y recomendaciones que debe cumplir cada modelo interno. Entre estos, se destacan el número mínimo de observaciones para estimar el  $VaR$  (250 datos), y el horizonte de pronóstico de esta medida (diez días). Dicho horizonte, es superior a un día, que es una periodicidad común para las estimaciones del  $VaR$ ; es por esto que la regulación recomienda reescalar el Valor en Riesgo diario para obtener el  $VaR$  multiperiodo.

Una vez calculado el  $VaR$  por parte de las entidades, se deben llevar a cabo pruebas de desempeño (en adelante *backtesting*), las cuales evalúan si las estimaciones de modelos internos son apropiadas. Estas metodologías comparan los valores en riesgo pronosticados con los retornos observados; dichas pruebas determinan si el riesgo está siendo medido adecuadamente. En secciones posteriores del documento se describirán estas metodologías en forma detallada.

De acuerdo a la regulación, la estimación del  $VaR$  para periodos de tenencia mayores a un día se obtiene como la multiplicación del  $VaR$  diario por la raíz del horizonte de pronóstico. Así, si se quiere hallar el  $VaR$  para diez días, basta con calcular el  $VaR$  diario y multiplicarlo por la raíz de diez. Sin embargo, dicho escalamiento no es válido para todas las metodologías de estimación del

*VaR*.

El propósito de este estudio es analizar el desempeño de estimaciones del *VaR* para un conjunto de activos colombianos, bajo diversas metodologías, estas incluyen diferentes horizontes de pronóstico y niveles de significancia. Adicionalmente, se verifica si los requerimientos exigidos por la regulación actual colombiana son suficientes para evaluar apropiadamente las estimaciones del *VaR*.

El resto del documento se compone de la siguiente manera, en la sección dos se lleva a cabo un resumen de los requerimientos de regulación de Basilea y de la Superintendencia Financiera de Colombia con respecto a la medición de riesgo de mercado. En la sección tres se define de forma detallada el Valor en Riesgo y el Valor en Riesgo Condicional (*CVaR*); mientras que la sección cuatro presenta diferentes metodologías para el cálculo de estas medidas. La sección cinco muestra algunas de las pruebas de *backtesting* más usadas en la literatura. Posteriormente, en la sección seis se muestran los resultados de las estimaciones del *VaR* y *CVaR* del ejercicio empírico, incluyendo las pruebas de *backtesting* correspondientes. Finalmente, en la sección siete se llevan a cabo algunos comentarios finales.

## 2. REGULACIÓN FINANCIERA

En esta sección se resumen algunos de los requerimientos y pautas de regulación con respecto a la medición del riesgo tanto en Basilea I y Basilea II como para el caso colombiano. Este análisis se centra en riesgo de mercado.

Basilea II se basa en tres pilares que se fortalecen entre sí:

1. *Requerimientos mínimos de capital*: en este pilar se fijan requisitos de capital para cubrir el riesgo de crédito, de mercado y operacional.
2. *Revisión de supervisores*: el segundo pilar está relacionado con el papel que juegan los reguladores del sistema bancario. Los supervisores deben asegurar que los bancos mantengan reservas por encima de los requisitos mínimos de capital, y que las entidades financieras tengan un sistema para evaluar sus riesgos y responder rápidamente cuando se generen problemas al respecto. Este pilar busca cubrir riesgos que no son incluidos en el pilar 1.
3. *Disciplina de mercado*: el tercer pilar crea fuertes incentivos para que las entidades financieras operen de forma clara y eficiente. Se trata de un conjunto de recomendaciones que busca que los bancos publiquen información acerca de sus movimientos financieros, perfiles de riesgo y reservas de capital.

Este acuerdo establece los requisitos de capital para tres categorías de riesgo: de crédito, de mercado y operacional. El capital total de la entidad financiera debe exceder el monto de riesgo total, el cual está definido como la suma de los montos de capital asociados a los tres riesgos:

$$Capital > TRC = CRC + MRC + ORC$$

Donde  $TRC$  es el monto total de riesgo,  $CRC$  es el monto de capital asociado al riesgo de crédito,  $MRC$  es el capital asociado a riesgo de mercado y  $ORC$  es el capital relacionado con riesgo operacional.

**2.1. Riesgo de Mercado.** El  $VaR$  es una medida principalmente utilizada para la medición de riesgo de mercado. Se entiende por riesgo de mercado la posibilidad de obtener pérdidas en las posiciones de un activo a causa de cambios en sus precios. Antes de asignar los requerimientos de capital, la enmienda clasifica los activos de una entidad financiera en dos categorías:

1. *Trading book*: es el portafolio de la entidad que contiene instrumentos financieros que se tienen de manera intencional para reventa a corto plazo.
2. *Banking Book*: esta clasificación considera otros instrumentos financieros, principalmente préstamos.

El método estándar supone que el riesgo de mercado se obtiene como la agregación de este tipo de riesgos para diversas categorías, de la siguiente forma:

$$MRC^{total} = \sum_{i=1}^4 MRC_i$$

Las cuatro categorías incluidas en esta clasificación son: riesgo de tasa de interés, riesgo de tipo de cambio, riesgo de acciones y riesgo de *commodities*. Este método posee la desventaja de que al sumar los tipos de riesgo de manera independiente, no tiene en cuenta la diversificación. Por esto, se puede considerar más apropiado llevar a cabo metodologías de modelo interno.

**2.1.1. Metodologías de Modelos Internos.** Debido a los problemas de la aproximación estándar, a partir de 1995 el comité de Basilea permitió que las entidades financieras usen sus propios modelos de medición del riesgo para determinar los requerimientos de capital; para usar la aproximación de modelos internos una entidad debe, en primer lugar, satisfacer algunos requerimientos cualitativos. Los modelos internos deben permitir la realización de pruebas de *stress testing*.<sup>1</sup> Adicionalmente, dentro de la entidad debe existir independencia entre el área de control de riesgos y los auditores externos. Una vez estos requerimientos básicos se cumplen, el cálculo del capital para cubrir riesgo de mercado tiene en cuenta los siguientes puntos:

---

<sup>1</sup>Estas consisten en generar artificialmente escenarios extremos en los retornos de un portafolio y evaluar su impacto en el modelo de riesgo. Una definición más detallada se encuentra en Christoffersen [2003], y Alexander [2008], entre otros.

1. El cálculo del *VaR* debe estar basado en el siguiente conjunto de requisitos cuantitativos:
  - 1.1 El modelo debe calcular el Valor en Riesgo para un horizonte de 10 días hábiles o dos semanas calendario.
  - 1.2 Las estimaciones se deben llevar a cabo con un nivel de confianza de 99%.
  - 1.3 El número de datos observados que se utilizan en la metodología debe ser por lo menos un año y se deben actualizar como mínimo cada trimestre.
2. Correlaciones entre activos: las correlaciones se pueden analizar dentro y entre categorías. Por ejemplo, se pueden considerar categorías de títulos de renta fija y de tasas de cambio.
3. Requerimientos de Capital (MRC): el capital necesario para cubrir el riesgo de mercado en el periodo  $t + 1$  se fija como el máximo entre el *VaR* del día anterior y el producto entre el promedio del *VaR* de los últimos 60 periodos y un factor multiplicativo  $k$ . El valor del factor multiplicativo se fija dependiendo del número de fallas, definidas como las pérdidas que exceden al *VaR*.
4. Factor adicional: un componente de penalización, o *Plus Factor*, se debe añadir al factor multiplicativo para incentivar a los bancos a medir correctamente el riesgo. Este factor adicional se añadirá al factor multiplicativo en la medida que las pérdidas excedan al *VaR* en demasiadas ocasiones, ver Cuadro 1.

De esta forma el requerimiento de capital para un día  $t + 1$ , con información hasta el periodo  $t$ , según la aproximación de modelos internos está dado por:

$$MRC_{t+1}^{JMA} = \max \left( k \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_t \right) + SRC_t \quad (1)$$

Donde *SRC* es el monto de capital que cubre el riesgo específico.<sup>2</sup>

El factor multiplicativo (zona verde) y el factor adicional de penalización (zonas amarilla y roja) se fijan de acuerdo a la siguiente tabla:

<sup>2</sup>Los modelos internos se concentran en el riesgo de mercado total que asume la entidad financiera y no tiene en cuenta fuentes de riesgo específico. Si una entidad mide el *VaR* utilizando la metodología interna, debe tener en cuenta un monto de capital por riesgo específico de no menos de la mitad del monto que se calcularía bajo el modelo estándar.

Número de excepciones	Factor multiplicativo		Zona
	Basilea II	Colombia*	
0 a 4	3	3	<b>Verde</b>
5	3.2	3.4	<b>Amarilla</b>
6	3.4	3.5	
7	3.6	3.65	
8	3.8	3.75	
9	4	3.85	<b>Roja</b>
10 o más	4	4	

\* Circular 051 de 2007 página 11.

CUADRO 1. Factor multiplicativo y factor adicional de penalización para modelos internos (Basilea II y Superintendencia Financiera de Colombia [2007] )

Teniendo en cuenta la ecuación (1) y que el mínimo valor del factor multiplicativo es 3; por lo general, el requerimiento de capital se calculará con base en el promedio de los valores en riesgo de los últimos 60 datos multiplicado por  $k$ .

Una gran ventaja de las metodologías de modelos internos es que permiten la actualización de los métodos de estimación con mayor frecuencia y rigurosidad, toda vez que no es necesario un cambio en la regulación para modificar los procesos de estimación.

Debe tenerse en cuenta que las metodologías internas deben ser revisadas con mayor rigurosidad. Esto se debe a que puede existir un incentivo para reportar un  $VaR$  con bajos valores para disminuir los requerimientos de capital.

Dowd [2002] menciona las siguientes falencias de la regulación tradicional con respecto las pruebas de desempeño sobre el  $VaR$ :

1. Se utiliza únicamente un tipo de prueba, el test de Kupiec, el cual no es confiable para muestras que no sean lo suficientemente grandes. Adicionalmente, esta prueba sólo evalúa una de las dos propiedades relevantes que debe cumplir un  $VaR$ .
2. Los modelos internos pueden ser mal evaluados en las pruebas de desempeño en situaciones de mercado anormales (como un desastre natural o un crack financiero) y por lo tanto, generar penalizaciones que los bancos no merecen.

3. Tanto el valor del factor multiplicativo como el del factor adicional de penalización son fijados de forma arbitraria.
4. Los procedimientos de regulación con respecto a las pruebas de desempeño pueden desincentivar a las entidades financieras de reportar sus verdaderas estimaciones del *VaR* a los supervisores.

2.1.1.1. *Otros aspectos de la validación del modelo.* Además del *backtesting*, se tienen otras metodologías para la validación de modelos internos. Estos obedecen a diversos análisis de escenarios en los cuales se refleja el hecho de que regularmente los bancos cambian el perfil de riesgo que asumen y la composición de su portafolio. Algunos aspectos importantes de este tipo de validación son:

1. Se deben verificar los supuestos del modelo interno utilizado. Por ejemplo, los supuestos distribucionales o la validez de la regla de la raíz.
2. El *VaR* debe ser medido suponiendo que las posiciones de las carteras al final del día no han cambiado.
3. Se deben utilizar varios niveles de significancia para el cálculo del *VaR*.

2.1.2. *Modelo estándar para el caso colombiano.* Al igual que en Basilea II, la metodología estandarizada en el caso colombiano se compone de cuatro módulos que se calculan separadamente: el riesgo de tasa de interés, riesgo de tasa de cambio, riesgo de precio de las acciones y riesgo de inversiones en carteras colectivas. La exposición total a riesgos de mercado corresponde a la suma de los riesgos de cada módulo.

La exposición al riesgo para tasa de interés se calcula por medio de los siguientes pasos:

1. *Cálculo de las sensibilidades:* la sensibilidad se calcula multiplicando la posición en el instrumento financiero por la duración modificada (Superintendencia Financiera, Circular externa 051 de 2007, Anexo 1. Página 7) y por el cambio de la tasa de interés. Posteriormente, las sensibilidades netas se clasifican en las escaleras de bandas correspondientes a la moneda en la cual esté denominado el instrumento y para cada una de esas escaleras se calcula por separado la exposición al riesgo de tasa de interés.
2. *Ajustes de bandas y zonas:* las posiciones al interior de cada banda, entre bandas y entre zonas no son homogéneas por lo que se debe realizar un ajuste de sensibilidades. Dicho ajuste consiste en multiplicar la suma menor de las sensibilidades en posiciones largas y la suma de sensibilidades de posiciones cortas por el factor de ajuste vertical y horizontal indicados por la

Superintendencia. Al realizar los ajustes necesarios, se obtiene la sensibilidad neta del portafolio.

3. *Cálculo del riesgo de tasa de interés para cada escalera de bandas*: corresponde a la sumatoria de los distintos cargos calculados en los pasos anteriores, es decir, los montos correspondientes al riesgo para cada escalera de bandas<sup>3</sup> más los cargos correspondientes a las posiciones en opciones.

Por otro lado, la exposición para tasa de cambio se calcula como la suma de las posiciones netas de operaciones spot (activos menos pasivos), la posición neta de las operaciones forward y la posición neta de operaciones en derivados. Posteriormente, se obtiene la posición neta de cada moneda y se calcula su equivalente en moneda legal de la siguiente forma: si se trata de activos en dólares, se multiplica la posición neta en dólares por la TRM. Si se trata de otras monedas, se deben convertir a dólares.

Como paso final en el cálculo del riesgo de tasa de cambio, las entidades vigiladas calculan la sensibilidad neta en cada moneda como el producto entre la posición neta y un factor de sensibilidad definido por la Super-Financiera. Así, la exposición al riesgo de la tasa de cambio será la suma del mayor valor entre la suma de sensibilidades netas positivas y el valor absoluto de la suma de las sensibilidades netas negativas (posiciones cortas).

El riesgo de precio de acciones se calcula como la suma de las posiciones netas en cada acción. La posición neta ponderada de cada acción es el producto de: 1) la posición neta de cada acción y 2) el factor de sensibilidad al riesgo general de acciones que refleja la volatilidad del IGBC. En el caso de que se tengan acciones en diferentes mercados, se debe calcular la exposición en cada mercado por separado y añadirla. Adicionalmente, en algunos casos se agregan cargos por posiciones en opciones a la exposición total de riesgo de precio de acciones.

Por último, el riesgo en inversiones en carteras colectivas que abarca los fondos comunes de inversión, los fondos de valores y fondos de inversión, se calcula como el producto entre el factor de riesgo de cada fondo y la posición invertida en el mismo.

La exposición que determina el requerimiento total de capital (Market Risk Charge o MRC) viene dado al igual que en Basilea I y II, por la sumatoria de las diversas exposiciones en los módulos de riesgo considerados.

**2.2. Cambios potenciales de la regulación: Basilea III.** Debido a la crisis financiera experimentada recientemente, se ha puesto en tela de juicio la eficacia de la regulación instaurada en Basilea II. Los requerimientos de capital no fueron los suficientes para responder a las pérdidas generadas por el vertiginoso aumento en el riesgo de crédito y de mercado. Así, los principales entes reguladores han planteado la necesidad de modificar la regulación con la implementación

---

<sup>3</sup>Esta tabla de bandas se encuentra en el Anexo 1 de la circular 051 de 2007 de la Superintendencia Financiera

de un nuevo acuerdo (*Basilea III*) aún cuando Basilea II no se ha establecido por completo en el sistema financiero.

Se propone aumentar la ponderación de riesgo de un porcentaje considerable de inversiones; así, como incrementar los estándares de calidad de los activos que conforman un portafolio. Este cambio en la regulación busca disminuir el tamaño de grandes conglomerados financieros, esto se logra aumentando sus requisitos de capital. Aunque este cambio de regulación implicaría un menor riesgo, también se generaría una disminución de la rentabilidad de los activos toda vez que se acumula más capital de reserva.

En cuanto al *VaR*, se propone un mayor énfasis en el uso de medidas de *Stress Testing* (Stress-VaR), de manera que se pueda afrontar de una mejor forma sucesos de la magnitud de la crisis de los últimos años.

Standard and Poors ha coincidido con los entes regulatorios en que el *VaR* debe tener en cuenta en mayor medida los riesgos a los que están expuestas las inversiones. Sin embargo, menciona que usar el Stress - VaR puede ser exagerado, pues como se observa en la ecuación (1) y el Cuadro 1, el mínimo factor multiplicativo es 3; por lo tanto, se estaría actuando como si hubiese riesgos mucho mayores que los asociados a las pérdidas experimentadas en los últimos años. Como se ha mencionado, esto puede ir en detrimento de la rentabilidad del sistema financiero.

### 3. MEDIDAS DE RIESGO DE MERCADO

En esta sección se mencionan algunas metodologías para medir riesgo de mercado; adicionalmente, se comentan sus principales ventajas y desventajas, así como las estimación de estos métodos para horizontes de pronóstico de uno o más días.

**3.1. Valor en Riesgo (*VaR*).** El Valor en Riesgo es una metodología de amplio uso para la medición de riesgo de mercado de un activo. El *VaR* corresponde a la máxima pérdida posible en el  $\alpha \times 100\%$  de los mejores escenarios, o de forma equivalente a la mínima pérdida posible en el  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de las pérdidas más grandes. De esta forma el administrador de riesgo tiene la idea de que la pérdida en su inversión no excederá el *VaR* con probabilidad  $\alpha$ .

Por ejemplo, bajo el supuesto de que el negativo de los retornos (pérdidas) de un activo son *i.i.d.* y siguen una distribución normal estándar, el 5% peor de los casos (las pérdidas más grandes) se encuentra en el área no sombreada de la Figura 1. Por consiguiente, el 95% de los mejores casos se encontrará en el área sombreada. El  $VaR_{t-1}^{\alpha}$  corresponderá al percentil asociado a  $\alpha$  es decir, la mínima pérdida esperada en el  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de los peores casos.

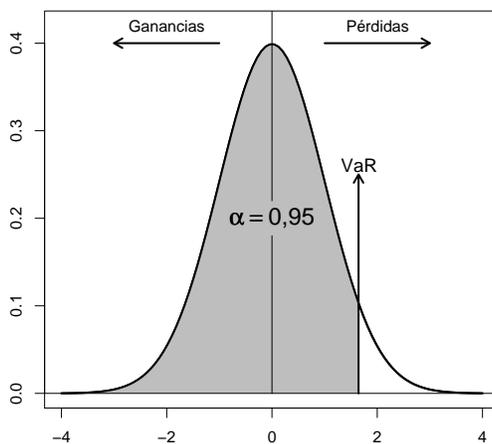


FIGURA 1. *VaR* de una variable aleatoria con una distribución normal estándar

3.1.1. *Críticas del VaR.* Como se ha mencionado, el *VaR* es una medida de fácil interpretación y amplia aceptación en los mercados financieros. Las principales ventajas de esta medida de riesgo, según Acerbi y Tasche [2002] son:

1. El *VaR* es una medida de riesgo *universal*, ya que puede ser aplicado a cualquier tipo de activo o fuente de riesgo.
2. El *VaR* es *simple*, tiene una fácil interpretación.
3. El *VaR* es *completo*, resume en un solo número, en unidades monetarias, las posibles fuentes de riesgo de mercado existentes en un portafolio.

No obstante, Artzner et al. [1999] definen algunas condiciones que debería satisfacer una medida de riesgo y definen el concepto de medida de riesgo coherente. Sea  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$  una medida de riesgo, donde  $V$  es un espacio de variables aleatorias en el que se encuentran todos los factores de riesgo. Se dice que  $\rho$  es una medida de riesgo coherente si satisface las siguientes condiciones:

1. *Monotonicidad:* para todo  $X, Y \in V$  con  $X \leq Y$ , entonces,  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ .
2. *Homogeneidad positiva:* para todo  $\lambda \geq 0$ , y  $X \in V$ ,  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

3. *Invariante ante traslaciones*: para todo  $X \in V$ , y todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$

4. *Subaditividad*: para todo  $X \in V$ ,  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

La subaditividad está asociada con el principio de diversificación. El riesgo de un portafolio diversificado debe ser menor o igual que la suma de los riesgos individuales.

Es posible mostrar que el *VaR* no satisface la condición de subaditividad; sin embargo, bajo distribuciones elípticas como en el caso de la normal esta propiedad se cumple (Embrechts et al. [2002], pág. 12). Por lo tanto, el *VaR* no es considerado como una medida coherente del riesgo, la consecuencia de esto es que en algunos casos el *VaR* puede llevar a resultados contradictorios para el administrador de riesgo.

**3.2. Valor en Riesgo Condicional (CVaR).** Una medida de riesgo que no presenta los inconvenientes del *VaR* es el *CVaR* (*VaR* condicional) o Expected Shortfall. Esta medida satisface la propiedad de subaditividad y adicionalmente, tiene en cuenta el tamaño de las pérdidas que exceden al *VaR*. El *CVaR* está definido como el valor esperado de las pérdidas que exceden al *VaR* (ver Figura 2). De esta forma, para los retornos de un activo,  $L_t$ , el *CVaR* está definido como:<sup>4</sup>

$$CVaR_{t|t-1}^{\alpha} = E(L_t | L_t > VaR_{t|t-1}^{\alpha}) \quad (2)$$

El *CVaR* puede ser entendido como el promedio de los  $(1 - \alpha) \times 100\%$  peores casos y puede ser calculado a través del promedio de los valores que exceden al *VaR* con un nivel de confianza  $\alpha$ .

A partir de la ecuación (2), se puede encontrar que para una distribución continua el *CVaR* se puede calcular como sigue:

$$CVaR_{t|t-1}^{\alpha} = \frac{1}{1 - F_L(VaR_{t|t-1}^{\alpha})} \int_{VaR_{t|t-1}^{\alpha}}^U L f_L(L) dL \quad (3)$$

Donde  $U$  representa el extremo superior de los retornos y  $F_L(\cdot)$ ,  $f_L(\cdot)$ , corresponden a la función de distribución y de densidad de los retornos, respectivamente. Si  $L \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ , el *CVaR* está dado por:

$$CVaR_{t|t-1}^{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\phi(z_{\alpha})}{1 - \Phi(z_{\alpha})} \quad (4)$$

<sup>4</sup>La ecuación (2) muestra la definición del *CVaR* en el caso de distribuciones continuas. Sin embargo, para esta medida de riesgo existen otras definiciones más generales las cuales pueden ser aplicadas tanto a casos continuos como discretos. Una discusión detallada sobre estas medidas se encuentra en Acerbi y Tasche [2002].

Donde  $\phi(\cdot)$  y  $\Phi(\cdot)$  son las funciones de densidad y distribución de una variable aleatoria normal estándar, y  $z_\alpha = \frac{1}{\sigma}(VaR_{t|t-1}^\alpha - \mu)$ .

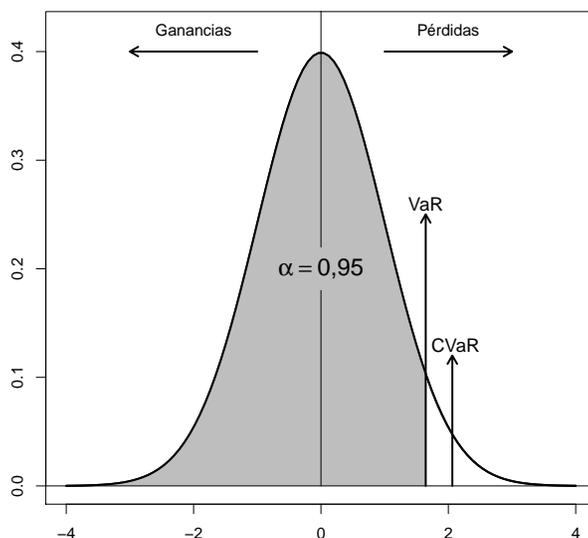


FIGURA 2.  $CVaR$  de una variable aleatoria con una distribución normal estándar

**3.3.  $VaR$  multiperiodo.** La Superintendencia Financiera al igual que el comité de Basilea exigen que las estimaciones del riesgo de mercado por medio del Valor en Riesgo se reporten para periodos de tenencia de 10 días. A pesar de que la actualización de los perfiles de riesgo y modificación de las ponderaciones de los portafolios puede ser diaria; el aumento del horizonte de tiempo del  $VaR$  de 1 a 10 días se justifica ya que es normal que el periodo de tenencia de cada activo sea superior a un día.<sup>5</sup>

El retorno para un periodo de tenencia de  $k$  días está dado por:<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Jorion [2007] menciona que presumiblemente, el comité de Basilea escogió un periodo de 10 días por que éste refleja el *trade-off* entre los costos de frecuente monitoreo y los beneficios de detección temprana de problemas potenciales.

<sup>6</sup>Este resultado se debe a que los retornos se calculan en forma logarítmica de la siguiente forma:  $Lt[k] = \log \frac{P_t}{P_{t-k}} = \sum_{i=0}^{k-1} \log \frac{P_{t-i}}{P_{t-i-1}}$

$$L_t[k] = \sum_{i=0}^{k-1} L_{t-i} \quad (5)$$

El valor esperado y la varianza de  $L_t[k]$  son:

$$E(L_t[k]) = \sum_{i=0}^{k-1} E(L_{t-i}) \quad (6)$$

$$V(L_t[k]) = \sum_{i=0}^{k-1} V(L_{t-i}) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{k-1} Cov(L_{t-i}, L_{t-j}) \quad (7)$$

Si los retornos diarios,  $L_t$ , son *i.i.d.* entonces  $Cov(L_{t-i}, L_{t-j}) = 0$  para todo  $i \neq j$  y  $E(L_{t-i}) = \mu$ ,  $V(L_{t-i}) = \sigma^2$  para todo  $i$ . De las ecuaciones (6) y (7) se obtiene:

$$E(L_t[k]) = k\mu \quad (8)$$

$$V(L_t[k]) = k\sigma^2 \quad (9)$$

Bajo las condiciones descritas anteriormente, el valor esperado y la varianza de  $L_t[k]$  son el producto del número de periodos  $k$  por el valor esperado y la varianza de  $L_t$ , respectivamente. Dentro de este contexto, denotaremos a  $VaR_{t+[k]t}^\alpha$  como el *VaR* asociado al retorno multiperiodo de horizonte  $k$ , mientras que para un horizonte de un periodo el *VaR* se denotará como  $VaR_{t+1|t}^\alpha$ .

Basados en lo anterior y suponiendo que  $\mu = 0$ , la regulación recomienda calcular el *VaR* con horizonte de 10 días como el reescalamiento del *VaR* para un día, es decir, el valor diario se multiplica por la raíz cuadrada de 10. No obstante, la aplicación de esta metodología conocida como la regla de la raíz es muy criticada en la literatura.

Al respecto, Diebold et al. [1997] desarrollan simulaciones de un proceso GARCH(1,1) y estiman las varianzas multiperiodo del proceso; estos autores encuentran que las varianzas son mucho más altas utilizando la regla de la raíz con respecto a estimaciones multiperiodo. Ellos concluyen que este reescalamiento solo es apropiado para retornos *i.i.d.*, lo cual no es factible dados los clusters de volatilidad que caracterizan las series financieras. Este resultado se mantiene al utilizar modelos GARCH(p,q) en lugar de modelos GARCH(1,1).

Danielsson y Zigrand [2006] evalúan las implicaciones del escalamiento de los cuantiles de la distribución de los retornos cuando éstos siguen un proceso estocástico de difusión con saltos; ellos encuentran que existe un sesgo al aplicar la regla de la raíz que tiende a empeorar a medida que aumenta el horizonte de pronóstico. Esto se debe a que la regla de la raíz no escala correctamente

los saltos de riesgo que interactúan no linealmente con el término Browniano. Estos autores también mencionan que la regla de la raíz sólo es válida para retornos *i.i.d.*

Saadi y Rahman [2008] realizan un ejercicio a partir de los datos diarios sobre el índice de la bolsa de Toronto (S&P/TSX) y utilizan una metodología para generar residuales *i.i.d.*, sobre los cuales aplican la regla de la raíz para comparar las estimaciones bajo diversos contextos económicos. Los autores encuentran que el sesgo de la estimación a partir de la regla de la raíz es una función cóncava del tiempo (positivo y aumenta a tasas decrecientes). Adicionalmente, la volatilidad condicional escalada tiene una desviación estándar más alta que la de las volatilidades reales. Por último, se menciona que la magnitud de esta volatilidad es influenciada por cambios en el régimen de política monetaria.

Para el caso colombiano, Castaño et al. [2008] estiman un modelo IGARCH para las variaciones de la tasa de cambio y calculan la volatilidad multiperiodo; estos autores encuentran que los pronósticos de las varianzas multiperiodos son diferentes a los obtenidos por la regla de la raíz.

En general, la literatura ha coincidido en que existe un sesgo al estimar las volatilidades por la regla de la raíz, el cual aumenta a medida que el horizonte de pronóstico es mayor. Esta regla solo es válida cuando los retornos son *i.i.d.*;<sup>7</sup> sin embargo, las series de tiempo financieras de alta frecuencia no cumplen dicho supuesto.

#### 4. METODOLOGÍAS UTILIZADAS PARA LA MEDICIÓN DE RIESGO DE MERCADO

Para el cálculo del Valor en Riesgo y Valor en Riesgo Condicional tanto a un periodo como multiperiodo se tuvieron en cuenta cinco metodologías, las cuales se muestran a continuación. Es importante tener en cuenta que se debe aproximar la medición del riesgo desde diversas alternativas debido a las ventajas y desventajas que presenta cada técnica.

**4.1. Simulación histórica.** El *VaR* se puede obtener a partir de la información histórica de los retornos. Esta aproximación no paramétrica consiste en calcular el percentil  $\alpha$  de la distribución empírica de las pérdidas y ganancias; esta metodología no impone supuestos sobre la distribución de los retornos y es de fácil aplicación. No obstante, la simulación histórica mantiene el supuesto de que la distribución no cambia en el tiempo por lo que este método es muy sensible al tamaño de muestra utilizada y a la inclusión de nuevos datos. En particular, esta aproximación supone que la varianza o volatilidad no cambia en el tiempo; esta característica genera desventajas para la simulación histórica con respecto a otras metodologías que modelan de forma apropiada el comportamiento de los retornos.

En esta metodología el *VaR* es calculado de la siguiente forma:

---

<sup>7</sup>Es importante aclarar, que esta regla también se puede satisfacer en ciertos modelos que no suponen retornos *i.i.d.*; un ejemplo es RiskMetrics®. Esta metodología es explicada en secciones posteriores.

$$\begin{aligned} VaR_{t+1|t}^\alpha &= PE(\{L_s\}_{s=1,\dots,t}, \alpha) \\ VaR_{t+[k]|t}^\alpha &= PE(\{L_s[k]\}_{s=1,\dots,t}, \alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

Donde  $PE$  es el cuantil de la distribución empírica asociado a  $\alpha$ . Además, el  $CVaR$  es calculado como el promedio de los retornos superiores al  $VaR$ , es decir:

$$\begin{aligned} CVaR_{t+1|t}^\alpha &= \frac{1}{(1-\alpha)t} \sum_{s=1}^t L_s \times \mathbf{1}(L_s > VaR_{t+1|t}^\alpha) \\ CVaR_{t+[k]|t}^\alpha &= \frac{1}{(1-\alpha)t} \sum_{s=1}^t L_s[k] \times \mathbf{1}(L_s[k] > VaR_{t+[k]|t}^\alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

Donde  $\mathbf{1}(\cdot)$  representa una función indicadora que toma el valor de uno cuando se satisface la condición entre paréntesis y cero en caso contrario.

**4.2. Normalidad.** Existen diferentes metodologías para calcular el  $VaR$  de forma paramétrica. El caso más simple resulta cuando se supone que la distribución de pérdidas y ganancias es normal. De esta forma, si  $L_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ , el  $VaR$  por normalidad se deduce a partir del siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} P[L_{t+1} \geq VaR_{t+1|t}^\alpha] &= P\left[\frac{L_{t+1} - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR_{t+1|t}^\alpha - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha \\ \implies \frac{VaR_{t+1|t}^\alpha - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(\alpha) \\ VaR_{t+1|t}^\alpha &= \mu + \sigma Z_\alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Donde  $\Phi^{-1}$  es la función inversa de la distribución normal estándar acumulada y  $Z_\alpha \equiv \Phi^{-1}(\alpha)$ .

Dado que para esta metodología se tiene que  $L_t[k] \stackrel{i.i.d}{\sim} N(k\mu, k\sigma^2)$ , el  $VaR$  multiperiodo es calculado como sigue:

$$VaR_{t+[k]|t}^\alpha = k\mu + \sqrt{k}\sigma Z_\alpha \quad (13)$$

Al igual que la simulación histórica, el  $VaR$  por normalidad es ampliamente usado por su facilidad de estimación. Sin embargo, un hecho estilizado en las series financieras de alta frecuencia es que éstas presentan distribuciones con colas pesadas y por lo tanto, estos datos, en general, no siguen una distribución normal. Por otro lado, este método tampoco asume que la volatilidad varía en el tiempo.

A partir de la ecuación (4) y de las distribuciones de los retornos a un día y multiperiodo, el *CVaR* para este caso está dado por:

$$\begin{aligned} CVaR_{t+1|t}^\alpha &= \mu + \sigma \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \\ CVaR_{t+[k]|t}^\alpha &= k\mu + \sqrt{k} \sigma \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \end{aligned} \quad (14)$$

**4.3. RiskMetrics®.** A diferencia de algunos métodos paramétricos, como el de normalidad, existen otras metodologías que modelan la varianza condicional de forma cambiante en el tiempo. Este hecho es consistente con la dinámica de las series de tiempo financieras si se tiene en cuenta que los retornos se caracterizan por presentar periodos de baja (alta) volatilidad seguidos por periodos de alta (baja) volatilidad.

El método de RiskMetrics® se basa en la técnica de suavizamiento exponencial en la cual la varianza se determina como un promedio ponderado de los retornos cuadráticos pasados, es decir:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_{t-i}^2$$

Donde  $\alpha_i$  tiende a 0 a medida que  $i$  se incrementa y  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Así, suponiendo que las ponderaciones decaen exponencialmente a una tasa constante, es decir,  $\alpha_{i+1}/\alpha_i = \lambda$  donde  $\lambda \in (0, 1)$ <sup>8</sup> se obtiene:

$$\sigma_t^2 \approx (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} L_{t-i}^2 \quad (15)$$

Rezagando (15) y multiplicando por  $\lambda$ :

$$\lambda \sigma_{t-1}^2 \approx (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^i L_{t-i-1}^2 \quad (16)$$

Por último, restando (16) de (15) y asumiendo que el tamaño de  $n$  es grande, se tiene:

$$\sigma_t^2 \approx \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) L_{t-1}^2 \quad (17)$$

La ecuación (17) implica que la varianza bajo esta aproximación está determinada por el retorno y la varianza del periodo anterior. Una ventaja de este método es que depende de un solo parámetro

<sup>8</sup>Es decir,  $\alpha_i = \lambda^{i-1} \alpha_1$

$\lambda$ , el cual indica la ponderación asignada a cada uno de los dos términos de la expresión (17). Esta metodología propuesta por JP Morgan Bank [1995] se conoce como RiskMetrics<sup>®</sup>. Por lo general JP Morgan Bank [1995] recomienda que el parámetro  $\lambda$  tome valores entre 0,94 y 0,99. La serie resultante de varianzas tendrá un comportamiento más suave a medida que el valor de  $\lambda$  sea mayor.

Tsay [2002] prueba que bajo el modelo de RiskMetrics<sup>®</sup> el pronóstico de la varianza del retorno para  $k$  periodos,  $V(L_t[k]|t-k)$ , está dado por:

$$V(L_t[k]|t-k) = kV(L_{t-k+1}|t-k) \quad (18)$$

O de forma equivalente,  $V\left(\log\left(\frac{P_{t+k}}{P_t}\right)\middle|t\right) = kV\left(\log\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)\middle|t\right)$ . La anterior ecuación implica que esta metodología satisface la regla de la raíz.

Esta metodología supone que  $L_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ , donde  $\sigma_t^2$  está determinado por la ecuación (17). Teniendo en cuenta estos supuestos y el resultado de la ecuación (18) se tiene que:

$$\begin{aligned} VaR_{t+1|t}^\alpha &= \widehat{\sigma}_{t+1|t} Z_\alpha \\ VaR_{t+[k]|t}^\alpha &= \sqrt{k} \widehat{\sigma}_{t+1|t} Z_\alpha \end{aligned} \quad (19)$$

En este caso, el *CVaR* está dado por:

$$\begin{aligned} CVaR_{t+1|t}^\alpha &= \widehat{\sigma}_{t+1|t} \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \\ CVaR_{t+[k]|t}^\alpha &= \sqrt{k} \widehat{\sigma}_{t+1|t} \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \end{aligned} \quad (20)$$

**4.4. ARMA-GARCH.** Engle [1982] propuso el modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models) buscando replicar algunos hechos estilizados de los activos financieros, como los conglomerados de volatilidad y las colas pesadas de su distribución. Estos modelos suponen que la varianza no condicional es constante en el tiempo, mientras que la varianza condicional es variable. El modelo  $ARMA(\tilde{p}, \tilde{q}) - ARCH(q)$  está definido a continuación:

$$\Phi(B)L_t = \xi + \Theta(B)\varepsilon_t \quad (21)$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t \quad (22)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (23)$$

Donde  $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$  es un proceso independiente de  $\sigma_t^2$ ,  $\Phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_{\tilde{p}} B^{\tilde{p}})$  y  $\Theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_{\tilde{q}} B^{\tilde{q}})$  y  $B$  es el operador de rezago. Además,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$  y  $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ . Bajo estos supuestos,  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco con varianza  $\sigma_t^2$ .

Por otro lado, los modelos GARCH desarrollados por Bollerslev [1986] poseen una estructura de rezagos más flexible y permiten una descripción más parsimoniosa de los datos. Un modelo  $ARMA(\tilde{p}, \tilde{q}) - GARCH(p, q)$  es descrito por las ecuaciones (21), (22) y una ecuación para la varianza condicional descrita por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (24)$$

Donde  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Estas condiciones garantizan la no negatividad de la varianza condicional.

La varianza no condicionada del término de error en un modelo GARCH(p,q) es:

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad (25)$$

Si  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \geq 1$ , la varianza del error no se encuentra definida, y los choques de volatilidad no se desvanecen a medida que avanza el tiempo. Así, para que la varianza esté definida, la suma de estos coeficientes debe ser menor a uno. Cuando dicha suma es igual a uno, se deben utilizar modelos GARCH integrados o IGARCH [Nelson, 1990]. Un ejemplo de estos modelos es RiskMetrics<sup>®</sup>, el cual se puede ver como un caso particular de un modelo IGARCH(1,1) con  $\alpha_0 = 0$ .

El pronóstico de la varianza multiperiodo en el modelo  $ARMA(\tilde{p}, \tilde{q}) - GARCH(p, q)$  está dado como sigue:

$$V(L_t[k]|t-k) = \hat{\sigma}_{t-k}^2 + (1 + \psi_1)^2 \hat{\sigma}_{t-1|t-k}^2 + \dots + \left( \sum_{i=0}^{k-1} \psi_i \right)^2 \hat{\sigma}_{t-k+1|t-k}^2$$

Donde  $\Psi(B) = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$

Teniendo en cuenta estos resultados, el  $VaR$  se calcula por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} VaR_{t+1|t}^\alpha &= \hat{\mu}_{t+1|t} + \hat{\sigma}_{t+1|t} Z_\alpha \\ VaR_{t+[k]|t}^\alpha &= \hat{\mu}_{t+[k]|t} + \hat{\sigma}_{t+[k]|t} Z_\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

Donde  $\hat{\mu}_{t+[k]|t} = \sum_{i=1}^k \hat{\mu}_{t+i|t}$  y  $\hat{\sigma}_{t+[k]|t}^2 = \hat{\sigma}_{t+k|t}^2 + (1 + \psi_1)^2 \hat{\sigma}_{t+k-1|t}^2 + \dots + (\sum_{i=0}^{k-1} \psi_i)^2 \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \cdot \hat{\mu}_{t+i|t}$  es el pronóstico de los retornos para el periodo  $t+i$  condicionado a la información disponible en  $t$  y es calculado a partir del modelo ARMA descrito en la ecuación (21). De forma similar,

$\widehat{\sigma}_{t+i|t}^2$  corresponde al pronóstico de la varianza para el periodo  $t+i$  condicionado a la información disponible en  $t$  y es calculado a partir del modelo GARCH especificado en las ecuaciones (22) y (24).

Por otro lado, el cálculo del *CVaR* para metodología *ARMA – GARCH* está basado en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} CVaR_{t+1|t}^\alpha &= \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \\ CVaR_{t+[k]|t}^\alpha &= \widehat{\mu}_{t+[k]|t} + \widehat{\sigma}_{t+[k]|t} \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \end{aligned} \quad (27)$$

La metodología *ARMA – GARCH* también se puede utilizar cuando los errores estandarizados tienen alguna distribución acumulada  $F$  diferente a la normal. En dicho caso, se debe reemplazar  $Z_\alpha$  por  $F^{-1}(\alpha)$  en el cálculo del *VaR*. Para el *CVaR*, la corrección, que depende del término que multiplica a la varianza pronosticada, es más compleja; por ejemplo, en McNeil et al. [2005] se presenta esta corrección para la distribución  $t - student$ .

**4.5. Simulación histórica filtrada.** Esta aproximación busca combinar las ventajas del *VaR* calculado paramétricamente, es decir, basado en modelos como GARCH o RiskMetrics<sup>®</sup> con las de la estimación empírica dada por la simulación histórica. El término “filtrada” hace referencia a que la simulación no se lleva a cabo sobre los retornos sino sobre los residuales estandarizados del modelo paramétrico utilizado.

El cálculo del *VaR* por simulación histórica filtrada para un día es sencillo. Por ejemplo, si los retornos  $L_t$  siguen un proceso GARCH(p,q) sus errores estandarizados se pueden obtener a partir de la ecuación (22) y por lo tanto, el *VaR* a un periodo con un nivel de confianza  $\alpha$  condicionado a la información disponible en  $t$  está dado por:

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = \widehat{\sigma}_{t+1|t} PE(\{\widehat{\eta}_s\}_{s=1,\dots,t}, \alpha) \quad (28)$$

Donde  $PE$  es el cuantil de la distribución empírica asociado a  $\alpha$ ,  $\widehat{\sigma}_{t+1|t}$  es la raíz cuadrada del pronóstico de la varianza un paso adelante obtenido a partir GARCH(p,q) descrito en la ecuación (24) y  $\widehat{\eta}_t$  son los residuales estandarizados del modelo en el periodo  $t$ .

De igual forma, si los retornos siguen un modelo *ARMA – GARCH* el *VaR* para un periodo se define como:

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} PE(\{\widehat{\eta}_s\}_{s=1,\dots,t}, \alpha) \quad (29)$$

El  $CVaR$  para un periodo se puede calcular como sigue:

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\mu}_{t+1|t} + \hat{\sigma}_{t+1|t} \frac{1}{(1-\alpha)^t} \sum_{s=1}^t \hat{\eta}_s \times \mathbf{1}(\hat{\eta}_s > PE(\{\hat{\eta}_v\}_{v=1,\dots,t}, \alpha)) \quad (30)$$

Cuando la estimación se realiza para retornos multiperiodo, la varianza del proceso GARCH (o del modelo que se tenga en consideración) debe ser simulada a partir de técnicas *bootstrap*. De esta forma se obtiene para la iteración  $r$ ,  $\hat{\eta}_t^{(r)}$  a partir de los residuales estandarizados del modelo,  $\hat{\eta}_t$ . Donde  $r = 1, 2, \dots, R$ , es decir, se realizan  $R$  replicaciones.

Posteriormente, se reconstruyen los errores (no estandarizados) y los retornos a partir de las ecuaciones (21), (22) y (24).

Al final del procedimiento se tendrán  $R$  secuencias de retornos simulados para los periodos  $t + 1$  hasta  $t + k$ . Así, para cada iteración  $r$ , el retorno multiperiodo es calculado por medio de la siguiente ecuación:

$$L_{t+k}^{(r)}[k] = \sum_{h=1}^k L_{t+h}^{(r)} \quad (31)$$

Finalmente, el  $VaR$  multiperiodo se calculado como:

$$VaR_{t+[k]|t}^\alpha = PE\left(\left\{L_{t+k}^{(r)}[k]\right\}_{r=1,\dots,R}, \alpha\right) \quad (32)$$

En este caso, el resultado descrito en la ecuación (32) no incluye un término relacionado con varianzas, ya que es un cuantil calculado sobre los retornos y no sobre los errores.

Por otro lado, el  $CVaR$  se calcula como el promedio de los retornos multiperiodo superiores al  $VaR$ , es decir:

$$CVaR_{t+[k]|t}^\alpha = \frac{1}{(1-\alpha)R} \sum_{r=1}^R \left[ L_{t+k}^{(r)}[k] \right] \times \mathbf{1}\left( L_{t+k}^{(r)}[k] > VaR_{t+[k]|t}^\alpha \right) \quad (33)$$

## 5. BACKTESTING

Una vez calculado el  $VaR$ , es necesario determinar si el riesgo está siendo medido de una forma adecuada. Para esto, se llevan a cabo pruebas de hipótesis que verifiquen el cumplimiento de las propiedades que debe satisfacer esta medida.

Estas pruebas requieren estimaciones recursivas del  $VaR$  para un periodo de tenencia dado, tal como se describe a continuación. Se supone que el procedimiento comienza en el periodo  $n_1$ , que se tiene información hasta el periodo  $n$  y que el horizonte de pronóstico es 1:<sup>9</sup>

1. Con la información hasta el periodo  $t$ , se calcula el valor en riesgo con un nivel de confianza  $\alpha$ , para el periodo  $t + 1$ ,  $VaR_{t+1|t}^\alpha$ , con  $t = n_1, n_1 + 1, \dots, n - 1$ .
2. A partir de los valores en riesgo estimados, se construye la serie de excepciones (o fallos)  $I_{t+1|t}$ , la cual se define como:

$$I_{t+1|t}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{t+1} \geq VaR_{t+1|t}^\alpha \\ 0 & \text{si } L_{t+1} < VaR_{t+1|t}^\alpha \end{cases}$$

Por lo tanto, las excepciones  $I_{t+1|t}(\alpha)$  tienen una distribución *Bernoulli*( $p$ ) con  $p = 1 - \alpha$ , donde  $p = E(I_{t+1|t}(\alpha))$ . Las principales propiedades que debe cumplir esta serie, para un nivel de confianza dado son:

1. *Propiedad de cubrimiento incondicional*: la probabilidad de que se genere un exceso sobre el  $VaR$  reportado debe ser exactamente  $1 - \alpha$ , si se encuentra que la probabilidad de que el exceso tome valor de 1 es distinta de  $1 - \alpha$  significa que el riesgo se está subestimando o sobreestimando, según sea el caso.
2. *Independencia*: cualquier par de elementos en la secuencia de fallos ( $I_{t+j|t+j-1}(\alpha)$ ,  $I_{t+k|t+k-1}(\alpha)$ ) deben ser independientes.

Las propiedades anteriores implican que la medición del cuantil de la función de pérdidas correspondiente al  $\alpha \times 100\%$  de los retornos (negativos) es adecuada, y que las excepciones observadas no poseen ninguna información relevante para predecir otros fallos. Una excepción predecible indica que el  $VaR$  no está reaccionando lo suficientemente rápido a las condiciones del mercado y por lo tanto, no sería una medida adecuada del riesgo. Cuando no se cumple el supuesto de independencia se podrían presentar rachas de pérdidas, lo cual representa un mayor *stress* financiero.

Es importante anotar que las dos propiedades mencionadas utilizan información cualitativa y no tienen en cuenta el tamaño de las pérdidas que exceden al  $VaR$ . Una medida de riesgo adecuada que satisfaga las propiedades anteriores debe adicionalmente penalizar las pérdidas de gran tamaño puesto que éstas podrían poner en riesgo la continuidad de la entidad. Posteriormente, se mencionarán algunas metodologías que tienen en cuenta estos aspectos.

**5.1. Prueba de Kupiec de proporción de fallas.** La prueba más utilizada en el *backtesting* de un  $VaR$  es la prueba de Kupiec. Su versión estándar corresponde a un *test* de proporción de fallas

<sup>9</sup>Para facilitar la notación, en esta sección se supone que el horizonte de pronóstico,  $k$ , es de un periodo. Sin embargo, las definiciones y procedimientos utilizados pueden ser fácilmente generalizados para horizontes mayores.

que verifica el cumplimiento de la propiedad de cubrimiento incondicional.

La hipótesis nula de esta prueba es  $H_0 : p = 1 - \alpha$ . Esta hipótesis puede ser contrastada a través de una prueba de razón de verosimilitud de la siguiente forma:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left( \frac{p^x (1-p)^{m-x}}{\tilde{p}^x (1-\tilde{p})^{m-x}} \right) = 2 \left( \ell(\hat{\Pi}_0) - \ell(\Pi_p) \right) \quad (34)$$

donde  $x$  representa el número de excepciones,  $m$  el número de observaciones incluidas en el *back-testing* y  $\tilde{p} = \frac{x}{m}$ . El numerador del estadístico corresponde a la función de verosimilitud bajo la hipótesis nula, mientras que el denominador corresponde a la función de verosimilitud evaluada en el estimador de máxima verosimilitud no restringido de  $p$ . La distribución asintótica de esta prueba bajo la hipótesis nula es  $\chi^2$  con un grado de libertad.

Debido a sus propiedades asintóticas, esta prueba no es completamente adecuada para los tamaños de muestras propuestos por los entes regulatorios.

**5.2. Pruebas de Christoffersen.** Como ya se ha mencionado, la prueba de Kupiec sólo se concentra en el número adecuado de fallas. A este respecto, Christoffersen [2003] propone una prueba conjunta que verifica tanto la propiedad de cubrimiento incondicional como la de independencia. Ésta se basa en el supuesto que las realizaciones de la sucesión de variables aleatorias  $\{I_{t+1|t}(\alpha)\}_{n_1}^{n-1}$  siguen una cadena de Markov de orden uno, cuya matriz de transición tiene la siguiente forma:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (35)$$

donde  $\pi_{ij} = P(I_{t+1|t}(\alpha) = j | I_{t|t-1}(\alpha) = i)$  con  $i, j = \{0, 1\}$  son las probabilidades de transición de la cadena de Markov, tal que  $\pi_{i0} + \pi_{i1} = 1$  para  $i = \{0, 1\}$ . A partir de esta condición, la matriz de transición (35) se puede reescribir como:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (36)$$

para estimar las probabilidades de transición  $\pi_{ij}$ , se hace necesario construir la función de verosimilitud para esta sucesión, dada por la siguiente ecuación:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{m_{00}} \pi_{01}^{m_{01}} (1 - \pi_{11})^{m_{10}} \pi_{11}^{m_{11}} \quad (37)$$

donde  $m_{ij}$  representa el número de observaciones en las cuales  $I_{t+1|t}(\alpha) = j$  e  $I_{t|t-1}(\alpha) = i$ , con  $m_{00} + m_{01} + m_{10} + m_{11} = m$ , siendo  $m$  el número total de observaciones incluidas dentro del *back-testing*. Utilizando la función objetivo (37), el estimador máximo verosímil de la matriz expresada

en (35) es:

$$\widehat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \widehat{\pi}_{00} & \widehat{\pi}_{01} \\ \widehat{\pi}_{10} & \widehat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{00}}{m_{00}+m_{01}} & \frac{m_{01}}{m_{00}+m_{01}} \\ \frac{m_{10}}{m_{10}+m_{11}} & \frac{m_{11}}{m_{10}+m_{11}} \end{bmatrix} \quad (38)$$

A partir de la matriz (35) y algunas consideraciones acerca del comportamiento de sus probabilidades de transición, es posible establecer si las excepciones son independientes. Específicamente, para este ejercicio resulta interesante comparar las diferencias entre  $\pi_{01}$ , la probabilidad de que mañana se presente una excepción dado que hoy no ocurrió, y  $\pi_{11}$ , la probabilidad de que mañana el retorno del activo exceda el  $VaR_\alpha$  condicionado a que hoy lo superó. Bajo el supuesto de independencia, se debe cumplir que  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$  y por lo tanto, la matriz de transición toma la forma:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1 - \pi & \pi \\ 1 - \pi & \pi \end{bmatrix} \quad (39)$$

En este caso, es posible demostrar que el estimador máximo verosímil de  $\pi$ , restringido a que  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$ , es igual a  $\widehat{\pi} = \frac{m_{01}+m_{11}}{m}$ . Con base en estos resultados, Christoffersen [2003] contrasta la hipótesis nula  $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11}$  a través de la siguiente prueba de razón de verosimilitud:

$$LR_{ind} = 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_1 \right) - \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) \right) \quad (40)$$

Donde  $\ell(\cdot) = \log L(\cdot)$ . Bajo  $H_0$ , el estadístico  $LR_{ind}$  se distribuye asintóticamente  $\chi^2$  con un grado de libertad. En caso que se rechace  $H_0$ , se diría que las excepciones del  $VaR_\alpha$  son dependientes y por lo tanto, el modelo utilizado debería modificarse para corregir estas deficiencias.

Finalmente, aunque las dos pruebas de hipótesis anteriores brindan información acerca del desempeño del  $VaR_\alpha$ , sería deseable probar de manera conjunta si las observaciones de  $I_{t+1|t}(\alpha)$  son independientes y si el promedio de excesos en realidad se acerca al nivel de significancia supuesto para el modelo, es decir,  $(1 - \alpha)$ . Para poder tener en cuenta esta posibilidad, Christoffersen [2003] propone la siguiente prueba de razón de verosimilitud, en la que se contrasta la hipótesis nula  $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = p$ :

$$LR_{cc} = 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_1 \right) - \ell \left( \Pi_p \right) \right) \quad (41)$$

nuevamente  $\ell(\cdot) = \log L(\cdot)$ , mientras que la matriz  $\Pi_p$  corresponde a la matriz de transición (39) evaluada en  $\pi = p = (1 - \alpha)$ , siendo  $\alpha$  el nivel de confianza considerado en el modelo  $VaR_\alpha$ . Bajo la hipótesis nula, el estadístico  $LR_{cc}$  asintóticamente se distribuye  $\chi^2$  con dos grados de libertad.<sup>10</sup> Tal como lo destaca Christoffersen [2003], una forma sencilla de calcular el estadístico  $LR_{cc}$  es a

<sup>10</sup>Es de notar que el estadístico de razón de verosimilitud de Kupiec se puede expresar en términos de la notación de Christoffersen de la siguiente manera:  $LR_{uc} = 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) - \ell \left( \Pi_p \right) \right)$ .

partir de las ecuaciones (34) y (40), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
LR_{cc} &= 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_1 \right) - \ell \left( \Pi_p \right) \right) \\
LR_{cc} &= 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_1 \right) - \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) + \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) - \ell \left( \Pi_p \right) \right) \\
LR_{cc} &= 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_1 \right) - \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) \right) + 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) - \ell \left( \Pi_p \right) \right) \\
LR_{cc} &= LR_{ind} + LR_{uc}
\end{aligned} \tag{42}$$

para llegar a este resultado, nótese que cuando  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$ , la función de verosimilitud (37) toma la forma de la función asociada a una variable aleatoria Bernoulli y por lo tanto el  $LR_{uc}$  se puede reescribir como  $LR_{uc} = 2 \left( \ell \left( \widehat{\Pi}_0 \right) - \ell \left( \Pi_p \right) \right)$ .

**5.3. Funciones de pérdida.** Además del cumplimiento de las propiedades de cubrimiento incondicional e independencia, se debe tener en cuenta las magnitudes de las pérdidas superiores al  $VaR$ . Por ejemplo, si se tienen dos medidas de  $VaR$  que satisfacen las dos propiedades mencionadas, pero una de ellas genera pérdidas mayores al  $VaR$  muy grandes, se preferirá aquella que tiene pérdidas menores. En este contexto, otra alternativa consiste en seleccionar aquel método cuyos pronósticos se acerquen en mayor medida a su pérdida esperada.<sup>11</sup> El primer caso está asociado a las funciones de pérdida utilizadas en el *backtesting*, mientras que el segundo hace referencia a las funciones de puntaje de probabilidad cuadrática. Estos dos casos son descritos a continuación.

**5.3.1. Funciones de puntaje de probabilidad cuadrática.** En esta sección se muestran algunas metodologías que evalúan el desempeño del *backtesting* desde el punto de vista del pronóstico de las pérdidas implícito en el  $VaR$ . Más que verificar supuestos sobre el  $VaR$ , estas pruebas se pueden utilizar para clasificar las metodologías del  $VaR$  según su desempeño en términos de una función de puntaje de probabilidad cuadrática (QPS, por sus siglas en inglés).

El punto inicial de estas metodologías consiste en generar una función de pérdida de la siguiente forma:

$$C_t = \begin{cases} f(L_t, VaR_{t|t-1}^\alpha) & \text{si } L_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ g(L_t, VaR_{t|t-1}^\alpha) & \text{si } L_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases} \tag{43}$$

Esta función debe cumplir la propiedad  $f(L_t, VaR_{t|t-1}^\alpha) \geq g(L_t, VaR_{t|t-1}^\alpha)$ ; es decir, la función  $C_t$  toma valores mayores cuando las pérdidas son superiores al  $VaR$ . Si el valor esperado de  $C_t$  es  $p = 1 - \alpha$ . Entonces, la función de puntaje de probabilidad cuadrática se define de la siguiente forma:

<sup>11</sup>En este caso, la pérdida esperada equivale al  $CVaR$  asociado al ejercicio, ya que éste se define como el valor esperado de las pérdidas mayores al  $VaR$ .

$$QPS = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^m (C_t - p)^2$$

Por lo tanto, el modelo asociado al estadístico QPS más pequeño corresponde al modelo con el mejor rendimiento en términos de los pronósticos implícitos del  $VaR$ . De esta forma, es posible clasificar los modelos según su desempeño.

5.3.1.1. *Propuesta de Blanco - Ihle*. Para la construcción del estadístico QPS, Blanco y Ihle [1999] proponen utilizar la siguiente función de pérdida:

$$C_t = \begin{cases} \frac{(L_t - VaR_{t|t-1}^\alpha)}{VaR_{t|t-1}^\alpha} & \text{si } L_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ 0 & \text{si } L_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases}$$

El valor de referencia para la evaluación de la estadística,  $p$ , es la diferencia entre el  $CVaR$  y el  $VaR$ , dividido sobre el  $VaR$ , esto es:

$$p = \frac{CVaR_{t|t-1}^\alpha - VaR_{t|t-1}^\alpha}{VaR_{t|t-1}^\alpha}$$

5.3.1.2. *Función de pérdidas de Dowd*. Un problema de la aproximación de Blanco - Ihle es que no está definida si el  $VaR_{t|t-1}^\alpha = 0$ . Adicionalmente, se pueden generar distorsiones en el estadístico QPS si el  $VaR$  toma valores cercanos a cero. Para solucionar estos inconvenientes, Dowd [2002] propone la siguiente función de pérdida:

$$C_t = \begin{cases} L_t & \text{si } L_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ 0 & \text{si } L_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases}$$

El valor esperado de los excesos para este caso es el  $CVaR$ . Así, la función de puntaje cuadrático está dada por:

$$QPS = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^m (C_t - CVaR_{t|t-1}^\alpha)^2$$

5.3.2. *Otro uso de las funciones de pérdida*. Como se mencionó anteriormente en lugar de construir el estadístico QPS se puede calcular un índice de desempeño alternativo para modelos de riesgo, definido como:

$$C = \sum_{t=1}^m C_t \quad (44)$$

De esta manera, a medida que  $C$  es más alto, el modelo de riesgo presenta un peor desempeño. Así, el mejor modelo será aquél que minimice (44). Al igual que en el caso del estadístico QPS, para la construcción de estos índices, se han propuesto diferentes funciones de pérdida, algunas de éstas se muestran a continuación.

5.3.2.1. *Frecuencia de pérdidas en las colas (López I)*. Dentro de este contexto, López [1998] especifica la siguiente función de pérdida binomial:

$$C_t = \begin{cases} 1 & \text{si } L_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ 0 & \text{si } L_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases}$$

Una desventaja de esta medida es que no tiene en cuenta el tamaño de las pérdidas.

5.3.2.2. *Aproximación de frecuencia ajustada por el tamaño (López II)*. Para superar los problemas de la metodología anterior, López [1998] propone la siguiente función de pérdidas:

$$C_t = \begin{cases} 1 + (L_t - VaR_{t|t-1}^\alpha)^2 & \text{si } L_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ 0 & \text{si } L_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases}$$

5.3.2.3. *Funciones de pérdida de Caporin*. Caporin [2003], menciona que la función de López ajustada por el tamaño de las pérdidas tiende a descartar modelos apropiados para la medición de riesgo cuando éstos presentan excepciones de gran tamaño.<sup>12</sup> Por lo tanto, propone el uso de funciones de pérdidas menos sensibles a valores atípicos; estas funciones se definen de acuerdo a la ecuación (43) donde  $g(\cdot) = 0$  y  $f(\cdot) = F_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , como se muestra a continuación:

$$F_1 = \left| 1 - \left| \frac{L_t}{VaR_{t|t-1}^\alpha} \right| \right|$$

$$F_2 = \frac{\left( |L_t| - |VaR_{t|t-1}^\alpha| \right)^2}{|VaR_{t|t-1}^\alpha|}$$

$$F_3 = |L_t - VaR_{t|t-1}^\alpha|$$

**5.4. Backtesting sobre el CVaR.** Becerra y Melo [2008] mencionan una prueba para evaluar el CVaR. Esta se basa en la definición del CVaR; es decir, que esta medida corresponde al valor esperado de los retornos que exceden al VaR. Por lo tanto, la diferencia promedio entre los retornos

<sup>12</sup>Es decir, pérdidas mayores al VaR muy altas.

mayores al  $VaR$  y el  $CVaR$  debería ser cero.

Esta prueba se calcula sobre la secuencia de “excesos de retorno”,  $H_{t|t-1}(\alpha)$ , definida para un periodo de tenencia y un nivel de confianza  $\alpha$ , como:

$$H_{t|t-1}(\alpha) = \left( L_t - CVaR_{t|t-1}^\alpha \right) I_{t|t-1}(\alpha)$$

Si el  $CVaR$  está bien especificado,  $H_{t|t-1}(\alpha)$  no debería ser significativamente diferente de cero. Para evaluar la hipótesis nula  $H_{t|t-1}(\alpha) = 0$ , McNeil et al. [2005] proponen el uso de un estadístico  $t$  calculado a partir de técnicas *bootstrap*. Estos autores recomiendan ponderar a  $H_{t|t-1}(\alpha)$  por  $1/\hat{\sigma}_{t|t-1}$  cuando la varianza no sea constante en el tiempo. Donde,  $\hat{\sigma}_{t|t-1}$  es el pronóstico de la desviación estándar para el periodo  $t$  condicionado a la información disponible en  $t - 1$ .

Es importante anotar que respecto a las metodologías mencionadas en esta sección, la única que se exige dentro de la regulación actual, tanto en Basilea como en el caso colombiano, es la prueba de cubrimiento incondicional. Por lo tanto, se omite la verificación de otras propiedades relevantes de las medidas de riesgo. Por ejemplo, no se tiene en cuenta la independencia de los excesos, ni tampoco se considera el tamaño de las pérdidas.

## 6. EJERCICIO EMPÍRICO

El ejercicio empírico consiste en la estimación del  $VaR$  y  $CVaR$  para diferentes activos utilizando las siguientes metodologías: RiskMetrics<sup>®</sup>, normalidad, ARMA - GARCH, simulación histórica, simulación histórica filtrada con RiskMetrics<sup>®</sup> (*simulación histórica filtrada RM*) y simulación histórica filtrada con ARMA - GARCH (*simulación histórica filtrada AG*). Estas estimaciones se llevan a cabo para tres niveles de confianza (0.95, 0.99 y 0.995) y para horizontes de uno y diez días.

Es importante notar que de las seis metodologías anteriormente mencionadas, solo la de RiskMetrics<sup>®</sup> cumple teóricamente la regla de la raíz. Para efectos comparativos se proponen tres ejercicios adicionales en los cuales erróneamente se aplica la regla de la raíz a metodologías que no la cumplen. Estos se denotan *normalidad RR*, *ARMA-GARCH RR* y *simulación histórica RR*.<sup>13</sup>

De acuerdo a las metodologías presentadas en sección 5, el desempeño del Valor en Riesgo se evalúa mediante las pruebas de razón de verosimilitud de cubrimiento incondicional ( $LR_{uc}$ ), independencia ( $LR_{ind}$ ) y cubrimiento condicional ( $LR_{cc}$ ). Respecto a las QPS y funciones de pérdida, se muestran los resultados de las estimaciones de Blanco - Ihle, Dowd, López, así como las funciones  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  de Caporin. Finalmente, para aquellas metodologías del  $VaR$  que sean apropiadas, se lleva a cabo la prueba de *backtesting* del  $CVaR$  propuesta por McNeil et al. [2005].

<sup>13</sup>Las metodologías de simulación histórica filtradas con RiskMetrics<sup>®</sup> y ARMA-GARCH, no fueron consideradas para estos ejercicios debido a su alto costo computacional.

**6.1. Datos.** Las medidas de riesgo son calculadas para los retornos (negativos)<sup>14</sup> de las siguientes variables: índice general de la bolsa de valores de Colombia (IGBC), precio implícito de títulos de tesoro a 10 años (TES) proporcionados por la Subgerencia Monetaria y de Reservas del Banco de la República y la tasa de cambio representativa del mercado peso - dólar (TRM). Para este ejercicio se seleccionó el periodo comprendido entre enero de 2003 y marzo de 2010 y se utilizaron datos de frecuencia diaria.

## 6.2. Resultados.

*6.2.1. Estimación para periodo de tenencia de un día.* Los Cuadros 2, 3 y 4 del Apéndice A muestran las pruebas de *backtesting* asociadas a la estimación del *VaR* para un horizonte de un periodo para los retornos de la TRM, el IGBC y los TES, respectivamente. Cada tabla está dividida en tres bloques. En el primer bloque, se presentan los *p-values* para los estadísticos de razón de verosimilitud  $LR_{uc}$ ,  $LR_{ind}$  y  $LR_{cc}$  y entre paréntesis se indica el número de excepciones correspondientes. En el segundo y tercer bloque se muestran los valores de las estadísticas QPS de Blanco-Ihle y de Dowd; así, como las funciones de pérdida de López II y las de Caporin ( $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ ). En cada una de las nueve estadísticas se presentan tres columnas que indican los tres niveles de confianza utilizados (0.95, 0.99, 0.995). Finalmente, las filas de estas tablas representan cada una de las metodologías utilizadas para la estimación del *VaR*.

En el caso de la TRM se observa que las pruebas de razón de verosimilitud para las seis metodologías utilizadas y los tres niveles de confianza no muestran indicios de una mala especificación. Por otra lado, para el IGBC el desempeño de las metodologías de RiskMetrics® y normalidad para todo nivel de confianza del *VaR* es adecuado según las tres pruebas *LR*. Sin embargo, el *VaR* medido por las metodologías de simulación histórica, simulaciones históricas filtradas y ARMA-GARCH, tienden a rechazar la hipótesis de cubrimiento incondicional ( $LR_{uc}$ ) en algunos casos y en tres de estas cuatro metodologías, se rechaza la hipótesis nula de la prueba de cubrimiento condicional para  $\alpha = 0,95$ .

En cuanto a las estimaciones del *VaR* para los TES, las tres pruebas de *backtesting* de razón de verosimilitud para las metodologías ARMA-GARCH y simulación histórica filtrada por ARMA-GARCH, no muestran evidencia de mala especificación. Respecto a las otras metodologías, la prueba de cubrimiento condicional se rechaza en el caso de RiskMetrics®, normalidad y simulación histórica para uno de los tres valores de  $\alpha$ .

Los anteriores resultados se pueden verificar en los gráficos de *backtesting* del Apéndice B.<sup>15</sup> Estos gráficos muestran los retornos negativos de las series analizadas, el *VaR* estimado, y los puntos

<sup>14</sup>Es decir, para cada una de las series analizadas,  $p_t$ , se realiza la siguiente transformación:  $-\log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$ . Por lo tanto, valores altos de esta serie indican pérdidas grandes.

<sup>15</sup>Por motivos de espacio, en el Apéndice B sólo se presentan las gráficas de *backtesting* asociadas a los retornos de los TES. Es decir, no se incluyen las gráficas para los retornos de la TRM y el IGBC. Sin embargo, estos se encuentran a disposición del interesado.

indican los casos en los que el retorno supera al  $VaR$ ; es decir, la serie de excepciones.

Como se comentó anteriormente, en el segundo y tercer bloque de los Cuadros 2, 3 y 4 se presentan los puntajes de probabilidad cuadrática y diferentes funciones de pérdida. Las estadísticas QPS y las funciones de pérdida permiten clasificar las metodologías según su desempeño en términos del tamaño de las pérdidas. Valores cercanos a cero de la estadística QPS indican que la metodología es adecuada. De forma similar, entre menores sean las funciones de pérdidas se tendrá un modelo con menores excesos.

Para la TRM, las metodologías con mejor desempeño en términos de las estadísticas QPS y funciones de pérdida, son la metodología de ARMA-GARCH y de forma menos evidente Normalidad y RiskMetrics®. Por otro lado, la simulación histórica y simulación histórica filtrada presentan un mejor rendimiento según las funciones de pérdida. Lo mismo sucede para el IGBC; sin embargo, el resultado con respecto a las simulaciones históricas filtradas no es claro, pues no hay fallas para  $\alpha = 0,99$  y  $\alpha = 0,995$ . Por último, en cuanto a los TES, las estadísticas QPS tienden a seleccionar las metodologías de RiskMetrics®, normalidad y ARMA-GARCH como las de mejor desempeño, y las funciones de pérdida a las simulaciones históricas. Sin embargo, este último resultado es de difícil interpretación ya que no se tienen excesos en estas metodologías para dos de tres niveles de  $\alpha$ .

En el Cuadro 8 del Apéndice A se encuentran los resultados que evalúan el desempeño del  $CVaR$  basados en una prueba propuesta por McNeil et al. [2005]. Estos resultados indican que, en general, no existe evidencia de una mala especificación del Valor en Riesgo Condicional.

En resumen, el desempeño de las medidas de riesgo para horizontes de un día es apropiado para las seis metodologías consideradas. Sin embargo, se debe notar que las estimaciones con mejor desempeño, son las reportadas por las metodologías que modelan tanto la media como la varianza condicional. Es decir, RiskMetrics®, ARMA-GARCH y simulaciones históricas filtradas.<sup>16</sup>

*6.2.2. Estimación Multiperiodo.* Las pruebas de *backtesting* para horizonte de pronóstico de 10 periodos se muestran en los Cuadros 5, 6 y 7 del Apéndice A. Estos cuadros tienen la misma estructura que los presentados para horizonte de un periodo; incluyendo metodologías re-escaladas por la regla de la raíz, tal como se menciona al inicio de la sección 6. Por otro lado, los gráficos de *backtesting* asociados a estas estimaciones son mostrados en el Apéndice B.<sup>17</sup>

En general, para los activos y metodologías analizados se rechaza la hipótesis nula de la prueba de cubrimiento incondicional. Adicionalmente, la prueba de independencia es de difícil interpretación, puesto que en muchos de los casos el número de excepciones es cero; en los casos en

<sup>16</sup>Es de notar que RiskMetrics® sólo modela la varianza condicional, el restante de estas metodologías modela tanto la media como la varianza condicional.

<sup>17</sup>Al igual que en el caso de la estimación con horizonte de pronóstico de un día, en el Apéndice B sólo se presentan las gráficas de *backtesting* asociadas a los retornos de los TES por motivos de espacio. Es decir, no se incluyen las gráficas para los retornos de la TRM y el IGBC. Sin embargo, estos se encuentran a disposición del interesado.

que existen fallos, se rechaza la hipótesis nula de independencia.

Lo anterior implica que la hipótesis nula de la prueba conjunta de cubrimiento condicional se rechaza en la mayoría de los casos. Cuando no es así, se debe a la ausencia de fallos que hace que la prueba de independencia tenga un *p-value* de uno sin implicar que los retornos mayores al *VaR* presenten un buen comportamiento.

De esta forma, se concluye que ninguna metodología satisface los supuestos del *VaR* para los niveles de confianza utilizados. Por lo tanto, no se considera adecuado interpretar las estadísticas QPS, ni las funciones de pérdida. Tampoco se deben estimar pruebas de desempeño del *CVaR*, toda vez que el *VaR* en ningún caso está bien especificado.

Respecto a las metodologías reescaladas con base en estimaciones con horizonte de pronóstico a un día, tampoco se observan estimaciones adecuadas de las medidas de riesgo. Dados estos resultados y tomando en cuenta que las estimaciones para periodos de tenencia de un día son adecuadas, se tiene que en los casos considerados, la regla de la raíz no es una medida apropiada para la estimación del *VaR*.

Para analizar la robustez de los resultados anteriores, se realizaron estimaciones multiperiodo para periodos de tenencia de cuatro y siete días. Dichas estimaciones muestran el mismo comportamiento; es decir, existe evidencia de mala especificación del *VaR* para todas las metodologías consideradas.<sup>18</sup>

Otro resultado interesante es que bajo las exigencias de la regulación, la única prueba que se requiere verificar es la prueba de cubrimiento incondicional para un nivel de confianza de 0.99. Al utilizar este criterio para el *VaR* multiperiodo, se encuentra que existen algunas metodologías que tendrían un desempeño adecuado. Sin embargo, si se verifican todas las propiedades relevantes del *VaR* para los tres niveles de confianza considerados, ningún modelo es apropiado.

## 7. COMENTARIOS FINALES

En este documento se hizo una revisión de los requerimientos de regulación por parte de Basilea II y la Superintendencia Financiera de Colombia para la medición de riesgo de mercado. Por otro lado, se mostraron las pruebas *backtesting* exigidas por la regulación actual y pruebas adicionales que evalúan otras propiedades del *VaR* y que se deberían tener en cuenta para verificar de forma adecuada el desempeño de las metodologías de medición del riesgo.

De igual forma, se consideraron diferentes modelos para la medición del *VaR*. Los modelos considerados incluyen tanto metodologías sencillas y de fácil implementación como métodos que pretenden modelar algunos hechos estilizados de las series financieras.

---

<sup>18</sup>Por simplicidad, estos resultados no son presentados en este documento, pero se encuentran a disposición de los interesados.

Cuando el horizonte de pronóstico es un día, el desempeño de las medidas de riesgo es apropiado, puesto que, en general, todas las metodologías consideradas reportan resultados aceptables. Sin embargo, se debe notar que las estimaciones con mejor desempeño, son las reportadas por las metodologías que modelan tanto la media como la varianza condicional.

Los resultados muestran que ninguna metodología mide adecuadamente el *VaR* multiperiodo para los activos considerados y horizontes de cuatro, siete y diez días. De igual forma, reescalar medidas con horizonte de pronóstico a un día, tampoco generan estimaciones adecuadas del riesgo. Esto implica que la regla de la raíz no es una medida apropiada para la estimación *VaR*.

Por otro lado, se observa que si sólo se tienen en cuenta los criterios de la regulación vigente (prueba de proporción de fallas,  $\alpha = 0.99$  y horizonte de 10 días), se tendrían algunos modelos adecuados; sin embargo, cuando se tienen en cuenta supuestos adicionales que debería satisfacer el *VaR*, ninguna metodología es apropiada.

En conclusión, se tiene que las pruebas de *backtesting* exigidas por la regulación no evalúan completamente el desempeño del *VaR*. Esto se debe a que no comprueban el cumplimiento de todas las propiedades relevantes para obtener un *VaR* y *CVaR* correctamente estimados (independencia de los excesos, cubrimiento condicional y que el promedio de las pérdidas mayores al *VaR* sea aproximadamente igual al *CVaR*). Por lo tanto, se deberían llevar a cabo pruebas adicionales a las exigidas por la regulación, para no validar metodologías de Valor en Riesgo incorrectas.

#### REFERENCIAS

- ACERBI, C., Y D. TASCHE (2002): "On the Coherence of Expected Shortfall," *Journal of Banking and Finance*, 26, 1487–1503.
- ALEXANDER, C. (2008): *Market Risk Analysis*, vol. IV - Value At Risk Models. John Wiley & Sons.
- ARTZNER, P., F. DELBAEN, J.-M. EBER, Y D. HEATH (1999): "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (1996a): "Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks," Discussion paper, GloriaMundi.
- (1996b): "Supervisory Framework for the use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements," Discussion paper, GloriaMundi.
- (2005): "Basell II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards," Discussion paper, GloriaMundi.
- BECERRA, O., Y L. F. MELO (2008): "Medidas De Riesgo Financiero Usando Cópulas: Teoría Y Aplicaciones," Borradores de economía 489, Banco de la República.
- BLANCO, C., Y G. IHLE (1999): "How Good is Your VaR? Using Backtesting to Assess System Performance," *Financial Engineering News*, (11).
- BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 309–328.

- CAPORIN, M. (2003): "Evaluating Value-at-Risk Measures in Presence of Long Memory Conditional Volatility," Discussion Paper 0305, GRETA.
- CASTAÑO, E., K. GÓMEZ, Y S. GALLÓN (2008): "Pronóstico y estructuras de volatilidad multiperíodo de la tasa de cambio del peso colombiano," *Revista Cuadernos de Economía*, 27(48), 241–266.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. (2003): *Elements of Financial Risk Management*. Academic Press.
- DANIELSSON, J., Y J.-P. ZIGRAND (2006): "On time-scaling of risk and the square-root-of-time rule," *Journal of Banking & Finance*, 30(10), 2701–2713.
- DIEBOLD, F. X., A. HICKMAN, A. INOUE, Y T. SCHUERMANN (1997): "Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by Root-h is Worse Than You Think," Center for Financial Institutions Working Papers 97-34, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania.
- DOWD, K. (2002): *An introduction to market risk measurement*. John Wiley & Sons.
- EMBRECHTS, P., A. MCNEIL, Y D. STRAUMANN (2002): "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls," in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. by M. Dempster, pp. 176–223. Cambridge University Press.
- ENGLER, R. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of Uk Inflation," *Econometrica*, 50, 987–1008.
- GOURIEROUX, C., Y J. JASIAK (2001): *Financial Econometrics: Problems, Models, and Methods*. Princeton University Press.
- JORION, P. (2007): *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk*. Mc Graw Hill, 3 edn.
- JP MORGAN BANK (1995): "RiskMetrics Technical Document," Discussion paper.
- LÓPEZ, J. A. (1998): "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates," *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, 3, 119–124.
- MCNEIL, A., R. FREY, Y P. EMBRECHTS (2005): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton University Press.
- MELO, L. F., Y O. R. BECERRA (2006): *Medidas de riesgo, características y técnicas de medición*. Universidad del Rosario - Centro editorial Rosarista.
- NELSON, D. (1990): "Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model," *Econometric Theory*, 6, 318–334.
- SAADI, S., Y A. RAHMAN (2008): "Evidence of non-stationary bias in scaling by square root of time: Implications for Value-at-Risk," *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 18(3), 272–289.
- SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA (2007): "Circular Externa 051 de 2007," Superintendencia Financiera de Colombia.
- TSAY, R. (2002): *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons.

APÉNDICE A. PRUEBAS SOBRE EL BACKTESTING DEL  $VaR$  Y EL  $CVaR$ 

En este apéndice, se muestran las pruebas de desempeño realizadas sobre las metodologías de  $VaR$  y  $CVaR$  mencionadas en la sección 4 y para las versiones reescaladas por regla de la raíz (normalidad RR, ARMA-GARCH RR y simulación histórica RR). En estos cuadros RM denota RiskMetrics<sup>®</sup> y AG significa ARMA - GARCH.

TRM	LR <sub>uc</sub>			LR <sub>ind</sub>			LR <sub>cc</sub>		
Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.322	0.747	0.114	0.976	0.857	1.000	0.612	0.934	0.287
	(16)	(2)	(0)	(16)	(2)	(0)	(16)	(2)	(0)
Normalidad	0.167	0.747	0.820	0.466	0.857	0.928	0.296	0.934	0.970
	(8)	(2)	(1)	(8)	(2)	(1)	(8)	(2)	(1)
ARMA - GARCH	0.209	0.747	0.820	0.870	0.857	0.928	0.448	0.934	0.870
	(17)	(2)	(1)	(17)	(2)	(1)	(17)	(2)	(1)
Simulación histórica	0.461	0.281	0.114	0.360	0.928	1.000	0.502	0.556	0.287
	(10)	(1)	(0)	(10)	(1)	(0)	(10)	(1)	(0)
Simulación histórica Filtrada RM	0.292	0.411	0.410	0.281	0.928	0.556	0.820	0.928	0.970
	(9)	(1)	(1)	(9)	(1)	(1)	(9)	(1)	(1)
Simulación histórica Filtrada AG	0.209	0.870	0.448	0.747	0.857	0.934	0.820	0.928	0.970
	(17)	(2)	(1)	(17)	(2)	(1)	(17)	(2)	(1)

TRM	(QPS) Blanco - Ihle			(QPS) Dowd			López		
Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.124	0.042	0.030	8.132	14.077	16.755	19.148	2.053	0.000
Normalidad	0.122	0.041	0.029	9.529	15.953	18.759	12.014	2.963	1.521
ARMA - GARCH	0.115	0.040	0.028	9.098	15.636	18.374	19.252	2.168	1.047
Simulación histórica	0.637	0.123	0.073	12.186	32.007	38.025	14.872	1.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	0.319	0.106	0.061	11.496	23.891	29.094	12.601	1.697	1.123
Simulación histórica Filtrada AG	0.202	0.277	0.373	9.755	20.971	29.438	19.449	2.227	1.179

TRM	F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>		
Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$
RiskMetrics <sup>®</sup>	3.473	0.106	0.000	1.841	0.018	0.000	5.257	0.297	0.000
Normalidad	2.441	0.426	0.276	2.434	0.408	0.199	4.012	1.004	0.722
ARMA - GARCH	3.037	0.242	0.105	1.455	0.089	0.023	4.551	0.456	0.218
Simulación histórica	3.138	0.008	0.000	3.125	0.000	0.000	4.970	0.019	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	2.064	0.333	0.118	2.205	0.278	0.041	3.500	0.835	0.351
Simulación histórica Filtrada AG	3.430	0.284	0.225	1.553	0.124	0.095	5.030	0.519	0.423

CUADRO 2. Pruebas de razón de verosimilitud (cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional), QPS (Blanco - Ihle y Dowd) y funciones de pérdidas (López,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$ ) para la TRM entre marzo de 2009 y marzo de 2010 con horizonte de pronóstico a un día. Los valores entre paréntesis corresponden al número de excesos. Las pérdidas esperadas son 13, 3 y 1 para  $\alpha = 0.95$ ,  $0.99$  y  $0.995$ , respectivamente.

IGBC	LR <sub>uc</sub>			LR <sub>ind</sub>			LR <sub>cc</sub>		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.292	0.747	0.533	0.316	0.857	0.857	0.347	0.934	0.810
	(9)	(2)	(2)	(9)	(2)	(2)	(9)	(2)	(2)
Normalidad	0.292	0.377	0.182	0.316	0.718	0.787	0.347	0.634	0.396
	(9)	(4)	(3)	(9)	(4)	(3)	(9)	(4)	(3)
ARMA - GARCH	0.014	0.753	0.533	0.651	0.787	0.857	0.045	0.917	0.810
	(5)	(3)	(2)	(5)	(3)	(2)	(5)	(3)	(2)
Simulación histórica	0.004	0.281	0.114	0.718	0.928	1.000	0.016	0.556	0.287
	(4)	(1)	(0)	(4)	(1)	(0)	(4)	(1)	(0)
Simulación histórica Filtrada-RM	0.001	0.025	0.114	0.787	1.000	1.000	0.005	0.082	0.287
	(3)	(0)	(0)	(3)	(0)	(0)	(3)	(0)	(0)
Simulación histórica Filtrada AG	0.004	0.718	0.016	0.025	1.000	0.082	0.114	1.000	0.287
	(4)	(0)	(0)	(4)	(0)	(0)	(4)	(0)	(0)

IGBC	(QPS) Blanco - Ihle			(QPS) Dowd			López		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.140	0.045	0.031	7.502	12.808	15.076	13.074	3.285	2.827
Normalidad	0.163	0.049	0.034	8.063	14.139	16.850	12.804	4.452	3.102
ARMA - GARCH	0.152	0.047	0.033	9.611	16.431	19.497	7.165	3.170	2.013
Simulación histórica	0.732	0.153	0.068	28.244	69.126	82.777	4.794	1.007	0.000
Simulación histórica Filtrada	0.669	0.170	0.051	22.432	55.824	67.696	3.410	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	0.358	0.187	0.098	15.648	35.425	43.860	5.414	0.000	0.000

IGBC	F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics <sup>®</sup>	3.710	1.059	0.763	3.572	0.891	0.533	4.515	1.574	1.234
Normalidad	3.342	0.607	0.161	2.866	0.231	0.047	4.477	1.189	0.353
ARMA - GARCH	1.848	0.284	0.055	1.462	0.081	0.005	2.754	0.597	0.131
Simulación histórica	0.806	0.038	0.000	0.539	0.003	0.000	1.232	0.083	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	0.490	0.000	0.000	0.210	0.000	0.000	0.961	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	1.264	0.000	0.000	0.881	0.000	0.000	2.063	0.000	0.000

CUADRO 3. Pruebas de razón de verosimilitud (cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional), QPS (Blanco - Ihle y Dowd) y funciones de pérdidas (López,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$ ) para el IGBC entre marzo de 2009 y marzo de 2010 con horizonte de pronóstico a un día. Los valores entre paréntesis corresponden al número de excesos. Las pérdidas esperadas son 13, 3 y 1 para  $\alpha = 0,95$ ,  $0,99$  y  $0,995$ , respectivamente.

TES	LR <sub>uc</sub>			LR <sub>ind</sub>			LR <sub>cc</sub>		
	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.322	0.019	0.011	0.976	0.525	0.651	0.612	0.051	0.036
	(16)	(7)	(5)	(16)	(7)	(5)	(16)	(7)	(5)
Normalidad	0.076	0.058	0.011	0.076	0.586	0.651	0.043	0.144	0.036
	(19)	(6)	(5)	(19)	(6)	(5)	(19)	(6)	(5)
ARMA - GARCH	0.874	0.377	0.533	0.699	0.718	0.857	0.916	0.634	0.810
	(13)	(4)	(2)	(13)	(4)	(2)	(13)	(4)	(2)
Simulación histórica	0.014	0.025	0.114	0.651	1.000	1.000	0.045	0.082	0.287
	(5)	(0)	(0)	(5)	(0)	(0)	(5)	(0)	(0)
Simulación histórica Filtrada RM	0.085	0.025	0.114	0.525	1.000	1.000	0.186	0.082	0.287
	(7)	(0)	(0)	(7)	(0)	(0)	(7)	(0)	(0)
Simulación histórica Filtrada AG	0.658	0.281	0.114	0.806	0.928	1.000	0.880	0.556	0.287
	(14)	(1)	(0)	(14)	(1)	(0)	(14)	(1)	(0)

TES	(QPS) Blanco - Ihle			(QPS) Dowd			López		
	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.142	0.044	0.030	2.346	4.029	4.778	19.455	8.013	5.556
Normalidad	0.165	0.049	0.034	2.234	3.999	4.761	22.893	7.194	5.703
ARMA - GARCH	0.133	0.043	0.031	2.869	4.900	5.805	14.987	4.284	2.102
Simulación histórica	0.350	0.065	0.045	6.187	12.515	13.836	5.815	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	1.609	2.397	3.257	9.053	47.053	96.477	8.100	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	1.002	0.946	1.242	4.565	18.080	30.488	16.832	1.075	0.000

TES	F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>		
	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995
RiskMetrics <sup>®</sup>	6.460	1.837	1.082	4.056	0.825	0.403	5.312	2.155	1.411
Normalidad	7.678	1.897	1.117	4.757	0.985	0.514	6.096	2.219	1.469
ARMA - GARCH	4.305	0.519	0.245	1.941	0.182	0.058	4.041	0.769	0.411
Simulación histórica	1.434	0.000	0.000	0.685	0.000	0.000	1.645	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	1.756	0.000	0.000	0.879	0.000	0.000	2.127	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	6.020	0.145	0.000	3.089	0.040	0.000	5.119	0.274	0.000

CUADRO 4. Pruebas de razón de verosimilitud (cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional), QPS (Blanco - Ihle y Dowd) y funciones de pérdidas (López,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$ ) para los TES entre marzo de 2009 y marzo de 2010 con horizonte de pronóstico a un día. Los valores entre paréntesis corresponden al número de excesos. Las pérdidas esperadas son 13, 3 y 1 para  $\alpha = 0.95, 0.99$  y  $0.995$ , respectivamente.

TRM	LR <sub>uc</sub>			LR <sub>ind</sub>			LR <sub>cc</sub>		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.000 (32)	0.000 (10)	0.000 (8)	0.000 (32)	0.000 (10)	0.000 (8)	0.000 (32)	0.000 (10)	0.000 (8)
Normalidad	0.043 (20)	0.000 (10)	0.533 (2)	0.000 (20)	0.000 (10)	0.857 (2)	0.000 (20)	0.000 (10)	0.810 (2)
Normalidad - RR	0.006 (23)	0.377 (4)	0.820 (1)	0.000 (23)	0.043 (4)	0.928 (1)	0.000 (23)	0.087 (4)	0.970 (1)
ARMA - GARCH	0.472 (15)	0.019 (7)	0.050 (4)	0.000 (15)	0.000 (7)	0.718 (4)	0.000 (15)	0.000 (7)	0.136 (4)
ARMA - GARCH - RR	0.000 (34)	0.000 (11)	0.000 (9)	0.000 (34)	0.000 (11)	0.000 (9)	0.000 (34)	0.000 (11)	0.000 (9)
Simulación histórica	0.472 (15)	0.058 (6)	0.002 (6)	0.000 (15)	0.000 (6)	0.000 (6)	0.000 (15)	0.000 (6)	0.000 (6)
Simulación histórica - RR	0.001 (26)	0.025 (0)	0.114 (0)	0.000 (26)	1.000 (0)	1.000 (0)	0.000 (26)	0.082 (0)	0.287 (0)
Simulación histórica Filtrada RM	0.023 (21)	0.747 (2)	0.820 (1)	0.000 (21)	0.006 (2)	0.928 (1)	0.000 (21)	0.022 (2)	0.970 (1)
Simulación histórica Filtrada AG	0.001 (26)	0.160 (5)	0.820 (1)	0.000 (26)	0.002 (5)	0.928 (1)	0.000 (26)	0.003 (5)	0.970 (1)

TRM	(QPS) Dowd			(QPS) Blanco - Ihle			López		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.133	0.042	0.030	76.492	139.261	164.877	164.082	33.371	17.663
Normalidad	0.111	0.036	0.027	108.707	178.310	213.016	148.228	18.473	3.371
Normalidad - RR	0.115	0.040	0.029	91.158	163.061	193.370	106.536	6.191	1.036
ARMA - GARCH	0.105	0.035	0.026	143.675	237.429	278.946	92.360	16.880	6.806
ARMA - GARCH - RR	0.142	0.043	0.030	89.333	155.155	183.013	207.344	60.285	37.089
Simulación histórica	0.070	0.011	0.009	121.572	155.280	164.746	131.605	19.185	14.488
Simulación histórica - RR	0.614	0.125	0.070	113.446	333.559	395.557	172.093	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	0.204	0.097	0.076	105.807	218.442	273.926	106.771	3.320	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	0.375	0.222	0.199	130.814	332.026	453.512	149.772	7.438	1.470

TRM	F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics <sup>®</sup>	10.593	1.929	0.861	27.632	3.515	1.326	50.137	12.949	6.300
Normalidad	8.745	1.022	0.178	25.485	1.137	0.161	44.329	7.593	1.491
Normalidad - RR	6.490	0.342	0.020	14.753	0.270	0.004	36.701	2.717	0.190
ARMA - GARCH	5.265	1.011	0.339	14.402	1.354	0.347	28.728	7.369	2.704
ARMA - GARCH - RR	13.119	3.479	2.202	40.153	8.387	4.352	56.712	20.644	14.260
Simulación histórica	7.273	1.153	0.840	25.363	1.853	1.141	34.995	8.200	6.250
Simulación histórica - RR	10.326	0.000	0.000	29.301	0.000	0.000	52.136	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	6.619	0.113	0.000	15.169	0.039	0.000	37.489	0.947	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	8.932	0.375	0.077	25.214	0.300	0.053	43.707	2.982	0.690

CUADRO 5. Pruebas de razón de verosimilitud (cobrimiento incondicional, independencia y cobrimiento condicional), QPS (Blanco - Ihle y Dowd) y funciones de pérdidas (López,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$ ) para la TRM entre marzo de 2009 y marzo de 2010 con horizonte de pronóstico a diez días. Los valores entre paréntesis corresponden al número de excesos.

IGBC	LR <sub>uc</sub>			LR <sub>ind</sub>			LR <sub>cc</sub>		
	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995
RiskMetrics®	0.000	0.025	0.114	0.928	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(1)	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)
Normalidad	0.167	0.281	0.114	0.018	0.928	1.000	0.024	0.556	0.287
	(8)	(1)	(0)	(8)	(1)	(0)	(8)	(1)	(0)
Normalidad - RR	0.000	0.025	0.114	0.928	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(1)	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)
ARMA - GARCH	0.000	0.025	0.114	1.000	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
ARMA - GARCH - RR	0.000	0.025	0.000	0.928	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
	(1)	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)
Simulación histórica	0.000	0.025	0.114	1.000	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
Simulación histórica - RR	0.000	0.025	0.114	1.000	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
Simulación histórica Filtrada RM	0.000	0.025	0.114	1.000	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
Simulación histórica Filtrada AG	0.000	0.025	0.114	1.000	1.000	1.000	0.000	0.082	0.287
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)

IGBC	(QPS) Dowd			(QPS) Blanco - Ihle			López		
	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995
RiskMetrics®	0.129	0.042	0.030	79.036	132.573	156.089	1.043	0.000	0.000
Normalidad	0.324	0.075	0.050	78.020	141.367	170.214	17.897	1.360	0.000
Normalidad - RR	0.160	0.049	0.034	99.034	169.980	201.490	2.886	0.000	0.000
ARMA - GARCH	0.165	0.050	0.035	119.493	207.346	246.656	0.000	0.000	0.000
ARMA - GARCH - RR	0.151	0.047	0.033	101.742	173.097	204.667	1.091	0.000	0.000
Simulación histórica	0.924	0.027	0.009	434.593	682.133	720.633	0.000	0.000	0.000
Simulación histórica - RR	0.747	0.161	0.072	298.552	724.593	867.862	0.000	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	0.274	0.133	0.115	164.468	338.362	435.451	0.000	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	0.487	0.359	0.342	277.986	723.411	1055.325	0.000	0.000	0.000

IGBC	F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>		
	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995	α = 0,95	α = 0,99	α = 0,995
RiskMetrics®	0.037	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.207	0.000	0.000
Normalidad	2.542	0.117	0.000	3.526	0.070	0.000	6.488	0.600	0.000
Normalidad - RR	0.315	0.000	0.000	0.432	0.000	0.000	1.373	0.000	0.000
ARMA - GARCH	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ARMA - GARCH - RR	0.056	0.000	0.000	0.017	0.000	0.000	0.302	0.000	0.000
Simulación histórica	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Simulación histórica - RR	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

CUADRO 6. Pruebas de razón de verosimilitud (cobrimiento incondicional, independencia y cobrimiento condicional), QPS (Blanco - Ihle y Dowd) y funciones de pérdidas (López,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$ ) para el IGBC entre marzo de 2009 y marzo de 2010 con horizonte de pronóstico a diez días. Los valores entre paréntesis corresponden al número de excesos.

TES	LR <sub>uc</sub>			LR <sub>ind</sub>			LR <sub>cc</sub>		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics®	0.129 (18)	0.160 (5)	0.050 (4)	0.000 (18)	0.000 (5)	0.000 (4)	0.000 (18)	0.000 (5)	0.000 (4)
Normalidad	0.000 (39)	0.000 (13)	0.000 (9)	0.000 (39)	0.000 (13)	0.000 (9)	0.000 (39)	0.000 (13)	0.000 (9)
Normalidad - RR	0.006 (23)	0.019 (7)	0.000 (4)	0.000 (23)	0.000 (7)	0.000 (4)	0.050 (23)	0.000 (7)	0.000 (4)
ARMA - GARCH	0.004 (4)	0.281 (1)	0.820 (1)	0.000 (4)	0.928 (1)	0.928 (1)	0.000 (4)	0.556 (1)	0.970 (1)
ARMA - GARCH - RR	0.322 (16)	0.377 (4)	0.182 (3)	0.000 (16)	0.000 (4)	0.000 (3)	0.000 (16)	0.001 (4)	0.000 (3)
Simulación histórica	0.014 (5)	0.025 (0)	0.114 (0)	0.002 (5)	1.000 (0)	1.000 (0)	0.000 (5)	0.082 (0)	0.287 (0)
Simulación histórica - RR	0.038 (6)	0.025 (0)	0.114 (0)	0.000 (6)	1.000 (0)	1.000 (0)	0.000 (6)	0.082 (0)	0.287 (0)
Simulación histórica Filtrada RM	0.001 (3)	0.025 (0)	0.114 (0)	0.000 (3)	1.000 (0)	1.000 (0)	0.000 (3)	0.082 (0)	0.287 (0)
Simulación histórica Filtrada AG	0.038 (6)	0.025 (0)	0.114 (0)	0.000 (6)	1.000 (0)	1.000 (0)	0.000 (6)	0.082 (0)	0.287 (0)

TES	(QPS) Dowd			(QPS) Blanco - Ihle			López		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics®	0.140	0.044	0.031	22.904	39.934	47.201	46.750	12.669	8.478
Normalidad	0.442	0.077	0.049	17.629	34.084	41.436	113.620	33.769	20.580
Normalidad - RR	0.158	0.047	0.033	23.687	42.489	50.929	55.635	12.333	6.224
ARMA - GARCH	0.132	0.043	0.030	50.024	83.746	98.444	11.639	1.414	1.007
ARMA - GARCH - RR	0.147	0.045	0.031	28.643	49.566	58.380	40.349	10.554	6.889
Simulación histórica	0.198	0.021	0.022	57.109	85.703	92.541	5.321	0.000	0.000
Simulación histórica - RR	0.358	0.064	0.043	63.668	129.248	142.537	7.093	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	1.122	0.541	0.532	128.990	420.894	650.207	2.817	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	0.983	0.885	0.981	90.116	320.711	547.069	11.330	0.000	0.000

TES	F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>		
	Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$
RiskMetrics®	6.960	1.558	1.011	11.798	2.300	1.214	17.302	5.206	3.737
Normalidad	22.892	4.672	2.607	46.637	7.592	3.675	38.034	12.954	8.327
Normalidad - RR	8.503	1.338	0.605	13.308	1.463	0.546	20.630	4.894	2.463
ARMA - GARCH	1.524	0.139	0.016	2.409	0.089	0.001	4.943	0.643	0.084
ARMA - GARCH - RR	5.929	1.285	0.790	10.890	2.061	1.093	13.994	4.105	2.829
Simulación histórica	0.267	0.000	0.000	0.079	0.000	0.000	0.969	0.000	0.000
Simulación histórica - RR	0.504	0.000	0.000	0.259	0.000	0.000	1.966	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada RM	0.292	0.000	0.000	0.190	0.000	0.000	1.266	0.000	0.000
Simulación histórica Filtrada AG	1.486	0.000	0.000	2.290	0.000	0.000	4.845	0.000	0.000

CUADRO 7. Pruebas de razón de verosimilitud (cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional), QPS (Blanco - Ihle y Dowd) y funciones de pérdidas (López,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$ ) para los TES entre marzo de 2009 y marzo de 2010 con horizonte de pronóstico a diez días. Los valores entre paréntesis corresponden al número de excesos.

Horizonte: 1 día	TRM			IGBC			TES		
Metodología	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$
RiskMetrics <sup>®</sup>	0.496	0.486	N.A.	0.447	0.439	0.406	0.456	0.449	0.459
Normalidad	0.465	0.512	0.326	0.466	0.490	0.566	0.444	0.434	0.450
ARMA - GARCH	0.493	0.516	0.522	0.498	0.596	0.466	0.490	0.512	0.469
Simulación histórica	0.524	0.337	N.A.	0.546	0.345	N.A.	0.500	N.A.	N.A.
Simulación histórica Filtrada RM	0.509	0.685	0.411	0.378	N.A.	N.A.	0.514	N.A.	N.A.
Simulación histórica Filtrada AG	0.487	0.539	0.578	0.545	N.A.	N.A.	0.514	0.592	N.A.

CUADRO 8. *P-Values* de las pruebas de McNeil et al. [2005] de desempeño del *CVaR* con horizonte de pronóstico de un día para el periodo de backtesting entre marzo de 2009 y marzo de 2010.

## APÉNDICE B. GRÁFICOS DE BACKTESTING

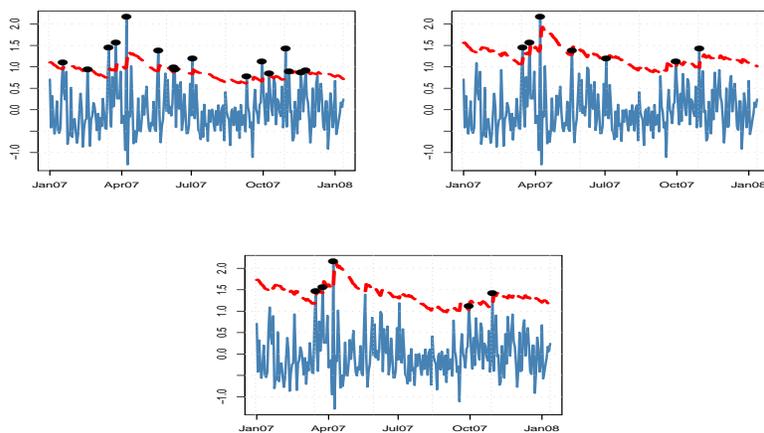


FIGURA 3. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  de los TES por metodología RiskMetrics<sup>®</sup> para horizonte de un día con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior). La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al  $VaR$  y los puntos la serie de excesos.

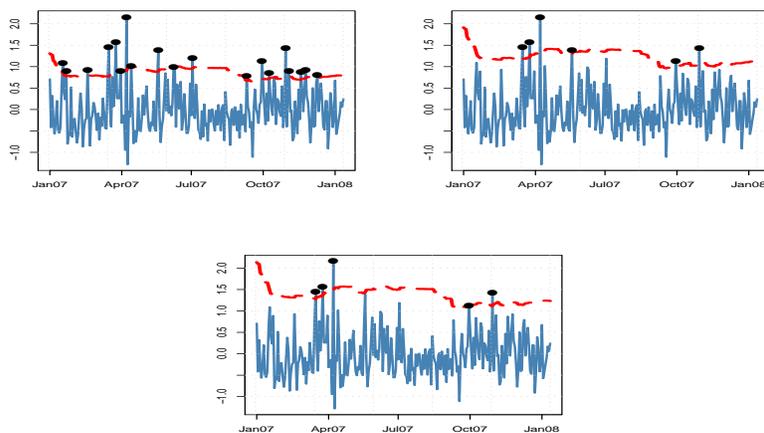


FIGURA 4. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  de los TES por metodología de Normalidad para horizonte de un día con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior). La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al  $VaR$  y los puntos la serie de excesos.

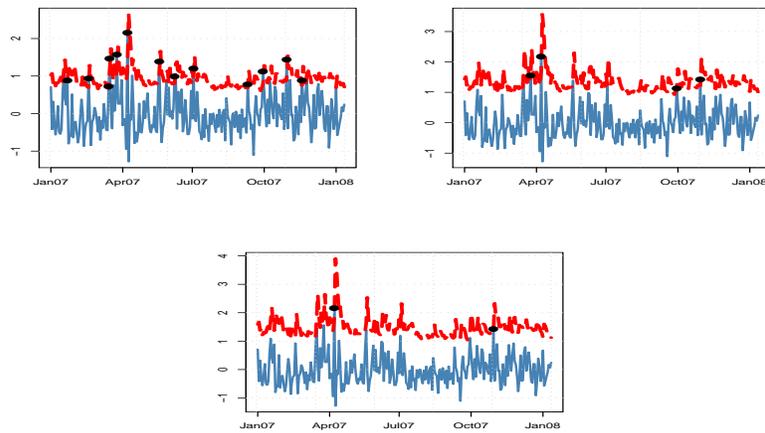


FIGURA 5. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  de los TES por metodología de ARMA - GARCH para horizonte de un día con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior). La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al  $VaR$  y los puntos la serie de excesos.

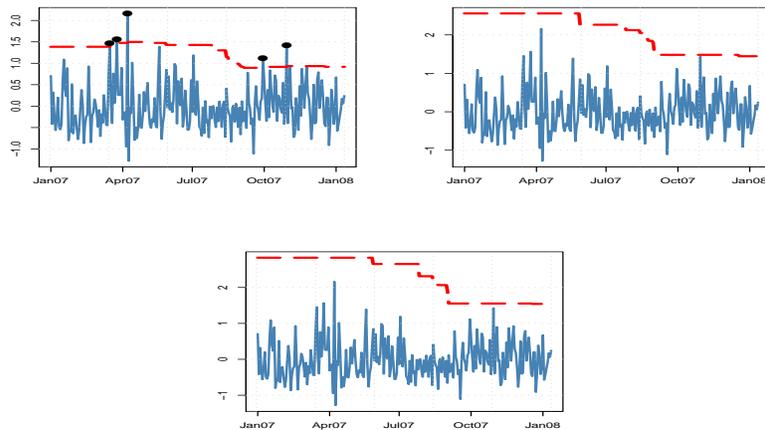


FIGURA 6. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  de los TES por metodología de Simulación Histórica para horizonte de un día con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior). La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al  $VaR$  y los puntos la serie de excesos.

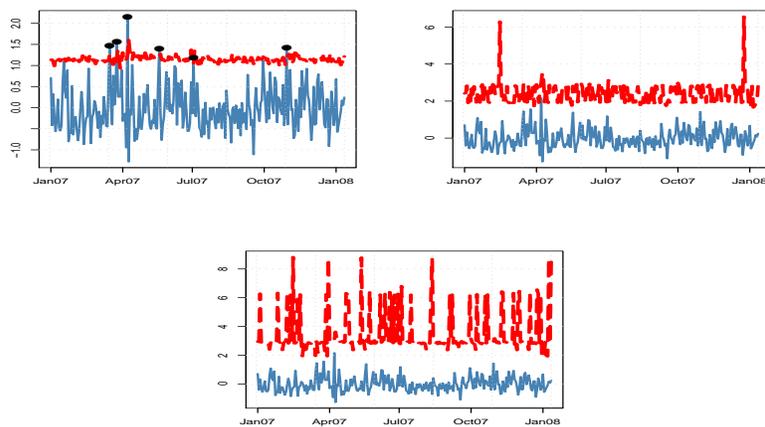


FIGURA 7. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  de los TES por metodología de Simulación Histórica Filtrada por RiskMetrics<sup>®</sup> para horizonte de un día con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior). La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al  $VaR$  y los puntos la serie de excesos.

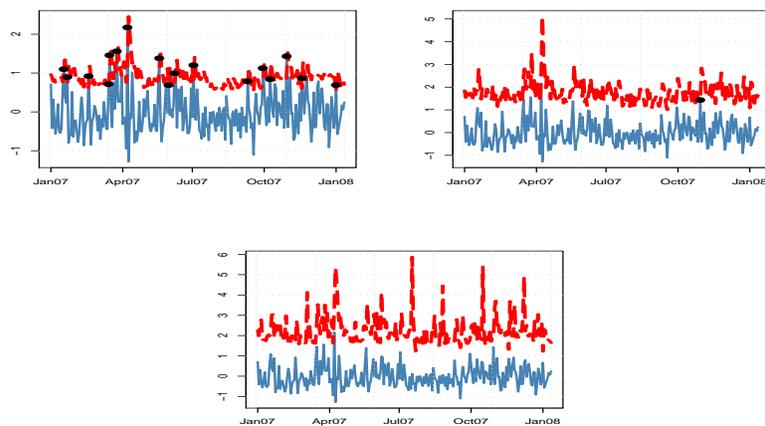


FIGURA 8. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  de los TES por metodología de Simulación Histórica Filtrada por ARMA - GARCH para horizonte de un día con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior). La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al  $VaR$  y los puntos la serie de excesos.

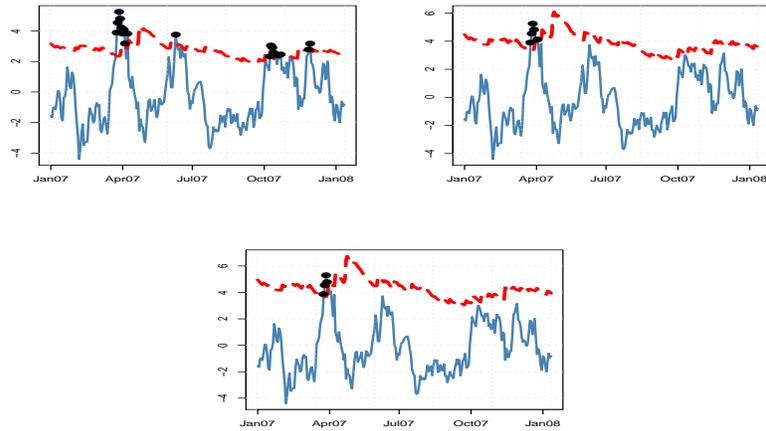


FIGURA 9. Gráficos de Backtesting para el *VaR* a 10 días de los TES por metodología RiskMetrics<sup>®</sup> con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

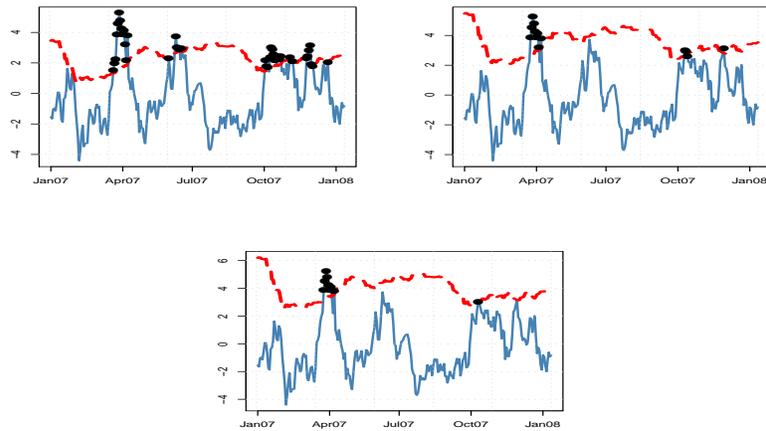


FIGURA 10. Gráficos de Backtesting para el *VaR* a 10 días de los TES por metodología de Normalidad con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

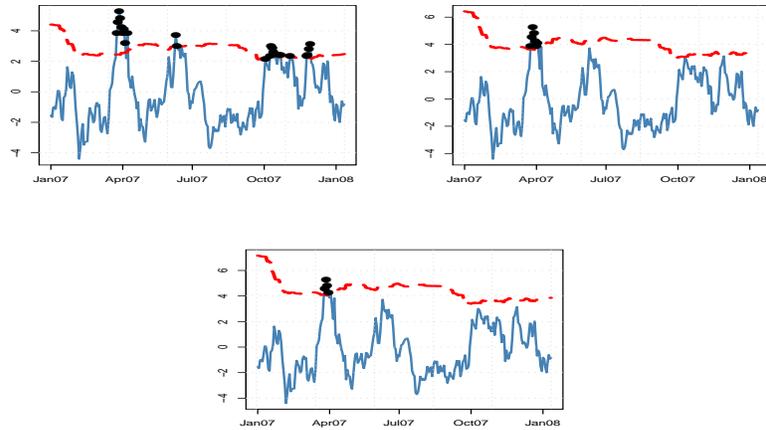


FIGURA 11. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  a 10 días de los TES por metodología de Normalidad reescalando por regla de la raíz con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

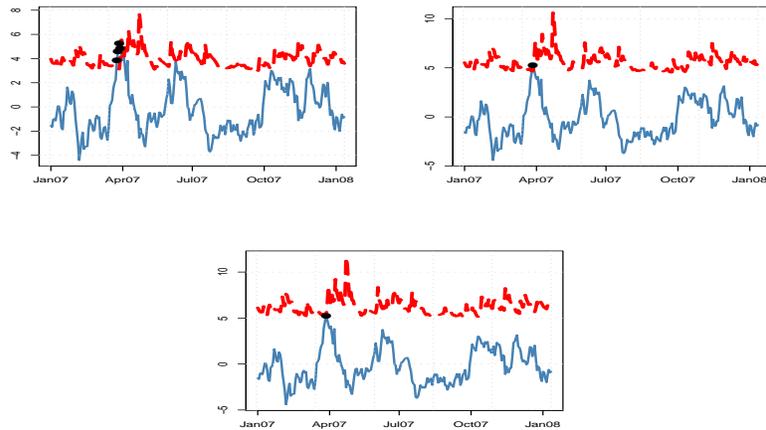


FIGURA 12. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  a 10 días de los TES por metodología de ARMA - GARCH con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

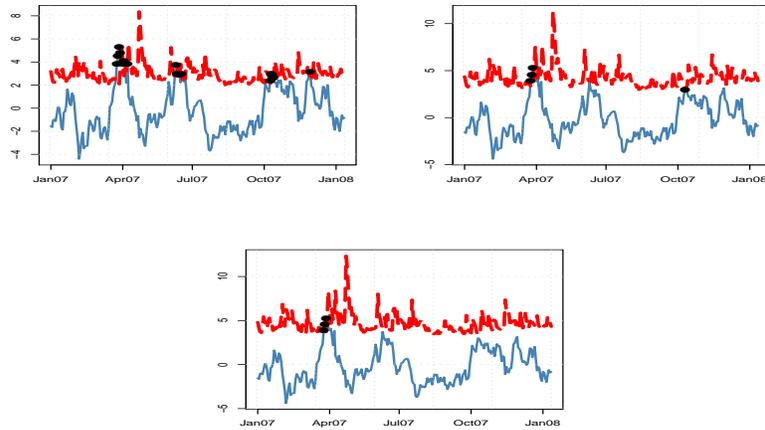


FIGURA 13. Gráficos de Backtesting para el *VaR* a 10 días de los TES por metodología de ARMA - GARCH reescalando por regla de la raíz con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

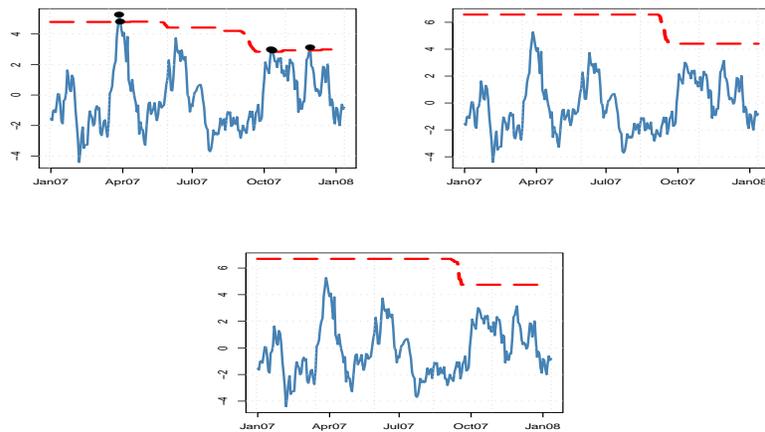


FIGURA 14. Gráficos de Backtesting para el *VaR* a 10 días de los TES por metodología de Simulación Histórica con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

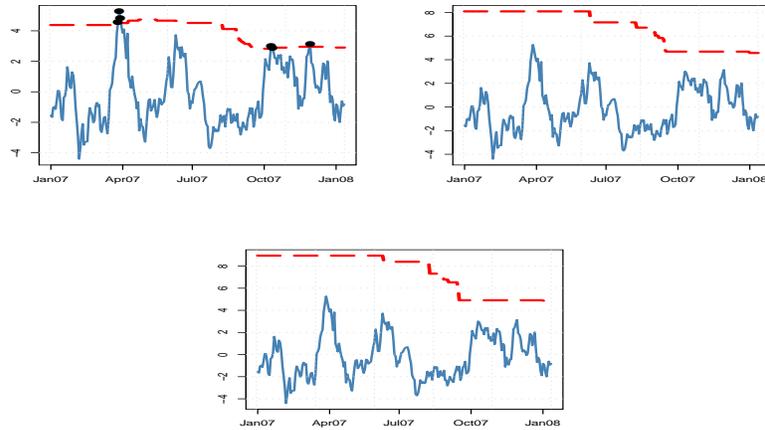


FIGURA 15. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  a 10 días de los TES por metodología de Simulación Histórica reescalando por la regla de la raíz con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

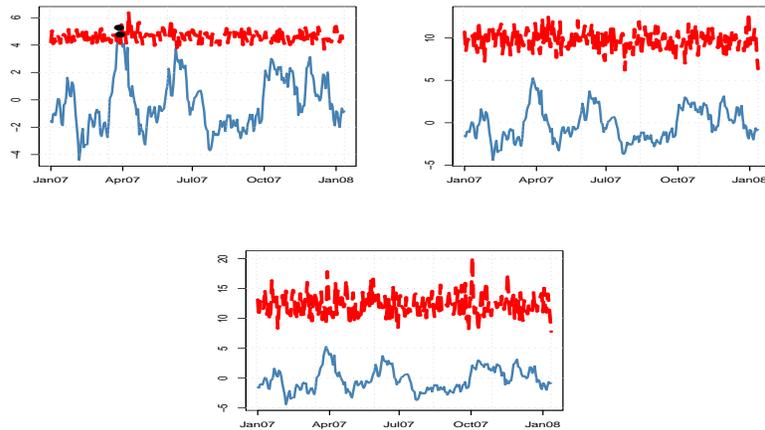


FIGURA 16. Gráficos de Backtesting para el  $VaR$  a 10 días de los TES por metodología de Simulación Histórica Filtrada por RiskMetrics® con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior) .

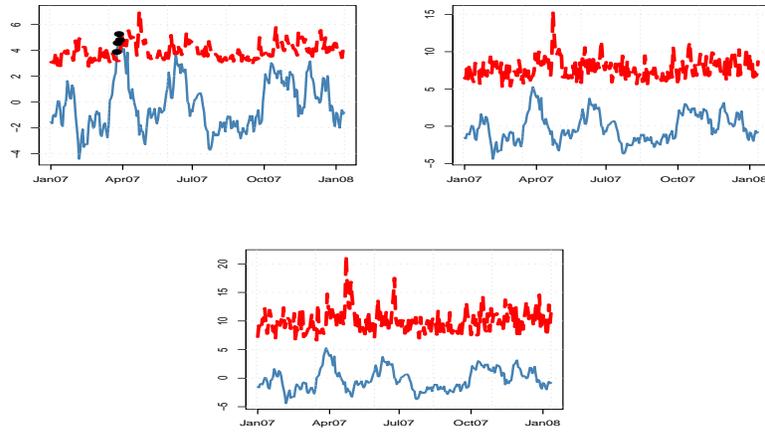


FIGURA 17. Gráficos de Backtesting para el *VaR* a 10 días de los TES por metodología de Simulación Histórica Filtrada por ARMA - GARCH con  $\alpha = 0,95$  (panel superior izquierdo),  $\alpha = 0,99$  (panel superior derecho) y  $\alpha = 0,995$  (panel inferior).