



ENSAYOS

sobre política económica

Modelo de la regulación de las AFP en Colombia y su impacto en el portafolio de los fondos de pensiones

Diego Jara

Revista ESPE, núm. 52, diciembre 2006

Páginas 162-221



Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista *Ensayos Sobre Política Económica* (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando no se obtenga lucro por este concepto y además, cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además poner en su propio *website* una versión electrónica del mismo, pero incluyendo la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción de esta revista para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro *website*, requerirá autorización previa de su Editor de ESPE.

Towards a Model of the Mandatory Pension Fund Regulation in Colombia and its Impact on Resulting Investments

Diego Jara*

Opinions and results exhibited in this document are the sole responsibility of the author; in no way do they compromise Banco de la República or the members of its Board of Directors. The author wishes to thank specially Carolina Gómez for her valuable work used in the elaboration of this document. The author also thanks Hernando Vargas, Juan Mario Laserna, Daniel Cortés, Felipe Gómez, Andrés Murcia, Eduardo Orejuela and Ana Fernanda Maiguashca for their contributions.

* E-mail: diegojara@gmail.com

Document received: 20 November 2006; final version accepted: 26 March 2007.

Abstract

It is natural to assume that workers prefer their future retirement savings to be invested efficiently; that is, avoiding risks that don't generate additional returns. However, it is not clear that pension fund administrators (PFA) face incentives to invest in efficient portfolios. In Colombia, elements such as the fee structure and the Minimum Return requirement may cause a divergence between preferences of the agent and the principal. This paper exhibits a model in which PFAs are expected utility maximizing agents; it is shown that the current regulation, and in particular the Minimum Return requirement, induce PFAs to invest in inefficient portfolios. It is therefore possible that the regulation does not protect optimally individual savers of mandatory pensions.

JEL Classification: D81, G11, G23.

Keywords: *efficient portfolio, utility function, mandatory pension fund regulation.*

Modelo de la regulación de las AFP en Colombia y su impacto en el portafolio de los fondos de pensiones

Diego Jara *

Es natural pensar que el futuro pensionado prefiere que su ahorro sea invertido eficientemente; es decir, sin tomar riesgos que no generen retornos adicionales; sin embargo, no es claro que las AFP estén incentivadas para invertir en portafolios eficientes. En el caso colombiano, elementos como la estructura de comisiones y la rentabilidad mínima, dadas en la regulación, pueden desalinearse las preferencias del principal y el agente. En este trabajo se presenta un modelo donde las AFP son agentes que maximizan su utilidad esperada, y se demuestra numéricamente que la regulación, y en particular la rentabilidad mínima, causan que las AFP prefieran invertir en portafolios ineficientes; entonces, es posible que esta

Las opiniones y resultados expuestos en este documento son de exclusiva responsabilidad del autor y no comprometen al Banco de la República ni a los miembros de su Junta Directiva. Especial agradecimiento a Carolina Gómez por su valiosa colaboración en la elaboración de este trabajo. El autor agradece a Hernando Vargas, Juan Mario Laserna, Daniel Cortés, Felipe Gómez, Andrés Murcia, Eduardo Orejuela y Ana Fernanda Manguashca por sus aportes.

* Correo electrónico: diegojara@gmail.com

Documento recibido el 20 de noviembre de 2006; versión final aceptada el 26 de marzo de 2007.

regulación no proteja óptimamente los ahorros de los afiliados al sistema de pensiones obligatorias.

Clasificación JEL: D81, G11, G23.

Palabras clave: portafolio eficiente, función de utilidad, regulación de las AFP.

I. INTRODUCCIÓN

En Gómez, Jara y Pardo (2005) se analiza la eficiencia financiera de los fondos de pensiones en Colombia, y la conclusión central es que la falta de diversificación en activos externos es causante de inversiones ineficientes. Lo que no se responde aquel trabajo es por qué las administradoras de los fondos de pensiones (AFP) se comportan de esta manera. La conjetura más natural es que las AFP no se benefician directamente por tomar decisiones de inversión eficientes: en efecto, la Ley 100, en su artículo 101, decreta que “La totalidad de los rendimientos obtenidos en el manejo de los fondos de pensiones será abonada en las cuentas de ahorro pensional individual de los afiliados [...]”; con esto, cabe preguntarse cómo se benefician las AFP. Aproximadamente el 83% de los ingresos mensuales de las AFP provienen del cobro de comisiones a los afiliados¹; el resto proviene de la valorización de la reserva de estabilización (capital de las AFP invertida directamente en los fondos), porción que se beneficia directamente por la eficiencia de las inversiones, y por actividades de tesorería de las AFP (independientes, en principio, del manejo de los fondos). Luego, para una administradora de fondos puede ser más importante ser eficiente en la consecución de cotizantes en el fondo, que ser eficiente en el manejo del dinero de los afiliados. Vale la pena anotar que esto implica que inversiones ineficientes no implican un comportamiento irracional de las AFP: es posible que un presunto desalineamiento entre las preferencias del agente y el principal, generado por la regulación, incentive a administradoras racionales a invertir en fondos ineficientes.

Un punto por cuestionar es la relación que existe entre la inversión en portafolios eficientes y la atracción de nuevos afiliados al fondo; Arango y Melo (2006)

¹ Promedio mensual desde mayo de 2002 hasta noviembre de 2005 para el sistema de AFP; según la Superintendencia Financiera, y cálculos del autor.

observan la relación entre la rentabilidad (sin ajustar por riesgo) y el número de afiliados a una AFP, encontrando una relación positiva; es decir, fondos con mayor rentabilidad eventualmente atraen un mayor número de afiliados. Este resultado desafía algunas intuiciones derivadas de la práctica: primero, la mayoría de los afiliados pueden esperar cotizar entre uno y dos salarios mínimos a lo largo de su vida laboral, y es muy improbable que su ahorro individual sea suficiente para darle una pensión igual al salario mínimo; entonces, casi con seguridad (suponiendo un número mínimo de semanas de cotización) estarán cobijados por la garantía de pensión mínima que ofrece el estado (Ley 100, artículo 65), y, por tanto, no deben preocuparse por el rendimiento de su cuenta individual². Segundo, la evidencia empírica sugiere que los nuevos afiliados, o los afiliados que buscan cambiarse de fondo, responden principalmente a otros incentivos a la hora de escoger su AFP, tales como los obsequios ofrecidos por los fondos para afiliarse; asimismo, esta evidencia sugiere que es muy poca la gente que revisa el rendimiento, y menos aún la que observa el riesgo de su cuenta individual. En este trabajo se analiza esta relación desde una perspectiva distinta a la presentada por Arango y Melo, y no se observa que exista relación significativa entre la rentabilidad de un fondo y el número de afiliados que ingresan a este; en cambio, sí se observa un impacto fuerte del gasto que la AFP hace en personal e infraestructura sobre su número de afiliados.

Por el lado de los costos, estos se componen en más del 50% en costos de personal e infraestructura, y en menores proporciones en impuestos, publicidad, custodia, procesamiento de datos y seguros. Un costo potencial muy importante (y normalmente ausente) es el de la garantía de la rentabilidad mínima: cumpliendo con el artículo 101 de la Ley 100, la Superintendencia Financiera define una cota mínima para la rentabilidad trianual de los fondos de pensiones; además, las administradoras deben cubrir con capital propio cualquier déficit existente. A pesar de ser un costo al que sólo en una ocasión una AFP ha debido responder con capital propio en los más de diez años de funcionamiento del sistema, éste puede ser muy cuantioso, y por tanto puede afectar las decisiones de inversión de los fondos, máxime cuando no es claro que tomar el riesgo de

² Puede concluirse que los afiliados tampoco deberían preocuparse por la ineficiencia de los fondos; de hecho, en este caso la preocupación recae sobre el Gobierno; ahora bien, si cotizantes con salarios bajos no cotizan suficientes semanas para acceder a la pensión mínima, entonces sí deben preocuparse por la eficiencia de su fondo, ya que el saldo de su cuenta le será entregado al momento de pensionarse.

incurrir en esa penalidad con el fin de conseguir rendimientos para el afiliado tenga beneficios considerables para la AFP.

El objetivo del presente trabajo es modelar el entorno regulatorio y de mercado de una AFP para tratar de identificar cuál debería ser su comportamiento óptimo (principalmente en términos de inversión del fondo de pensiones). La motivación es doble: primero, tratar de ofrecer una explicación económica para la ineficiencia de los fondos; segundo, plantear un modelo teórico para entender el efecto de distintas partes de la regulación, y poder pronosticar el efecto que cambios en la regulación podrían tener sobre la inversión de los fondos, y en particular sobre su nivel de eficiencia.

La ineficiencia de los fondos de pensiones es un problema que puede tener consecuencias graves a largo plazo: por un lado, inversiones ineficientes pueden reducir drásticamente el ahorro pensional; por ejemplo, una reducción promedio de 1% en la rentabilidad anual de una cuenta de ahorro individual durante una vida laboral disminuye la pensión en aproximadamente 30%. Igualmente, inversiones ineficientes son más sensibles a los ciclos económicos y financieros, y pueden causar disminuciones exageradas en las pensiones de empleados que se retiran en puntos bajos del ciclo. Por otro lado, una estrategia de inversión que no busca portafolios eficientes puede estar acompañada por rebalances frecuentes, lo cual puede afectar el normal funcionamiento de los mercados financieros y su estabilidad, perjudicando las operaciones de otras entidades financieras. Finalmente, momentos de crisis en Colombia serán más fuertemente sentidos por portafolios concentrados; la reacción de sus administradores puede, a su vez, agravar la situación. Con esto, es natural suponer que los afiliados al sistema de pensiones obligatorias prefieren que sus ahorros sean invertidos eficientemente. Esta premisa resalta la importancia de estudiar posibles desalineamientos entre el comportamiento de las AFP y los objetivos de sus afiliados.

Como es de esperarse, el objetivo presentado tiene pocas aspiraciones empíricas; así, lo mejor que se puede esperar es construir un modelo que prediga, con cierta cercanía, el comportamiento actual (o histórico) de las AFP; adicionalmente, el uso del modelo para pronosticar el impacto de cambios en la regulación no podrá ser sometido a *backtests*.

La literatura económica es bastante rica en monografías que resumen distintos esquemas de regulación de fondos de pensiones: por ejemplo, Suescún (2001)

resume el sistema colombiano de pensiones obligatorias, justificando la necesidad de regular el sistema, a la vez que expone puntos altamente debatidos por los mercados, las entidades reguladoras y los medios académicos. En particular, señala dos puntos: primero, los límites de inversión y las restricciones impuestas a activos riesgosos en general afectan la eficiencia (y en particular la rentabilidad de largo plazo) de los fondos, aunque pueden ser medidas justificables en mercados subdesarrollados; segundo, la rentabilidad mínima probablemente exagera un efecto manada natural en la composición de los portafolios pensionales —resúmenes de la situación de otros países puede encontrarse en Devesa-Carpio y Vidal-Meliá (2002), y en Srinivas, Whitehouse y Yermo (2000), y en referencias contenidas en ellos—.

Hasta donde conoce el autor, este análisis es el primer esfuerzo para modelar microeconómicamente el entorno de las AFP con los objetivos expuestos.

Tomando en cuenta los aspectos cualitativos de los resultados³, varios puntos se evidencian del modelo presentado: primero, es altamente probable que la regulación actual incentive inversiones en portafolios ineficientes; específicamente, si se remueve la rentabilidad mínima de la regulación actual, con el modelo se aprecia que el comportamiento óptimo de una AFP es invertir en un portafolio eficiente. Por otro lado, la rentabilidad mínima se construye con los retornos de dos portafolios, que son el portafolio del sistema y un portafolio de referencia, definido por la Superintendencia Financiera, el cual es bastante ineficiente. El segundo punto es que mientras más importancia tengan estos retornos en el cálculo de la rentabilidad mínima, más se acerca el portafolio óptimo para las AFP a estos portafolios; es decir, estos portafolios se convierten en un atractor para los fondos de pensiones; las AFP optimizan su utilidad (que es distinta a la de los afiliados) aproximándose a ellos, en detrimento de la eficiencia del fondo de pensiones. Tercero, cambios tales como determinar un portafolio de referencia eficiente, o definir comisiones variables que dependan del rendimiento del fondo, actuarían en favor de la eficiencia de los fondos de pensiones. Asimismo, aumentar el monto mínimo de participación de las AFP en el portafolio del fondo mediante la reserva de estabilización las incentivaría a buscar inversiones más eficientes; es decir, el

³ Es importante resaltar que, por su naturaleza, este modelo carece de validación empírica; más aún, la dimensionalidad del portafolio de los fondos de pensiones hacen de éste un problema de muy lenta o incierta convergencia numérica, por tanto, los resultados deben tomarse como indicaciones de posibles consecuencias.

modelo confirma la intuición de que alinear los incentivos de las AFP con la de sus ahorradores sería benéfico para la eficiencia de las inversiones⁴.

El documento se divide en cinco secciones; esta introducción es la primera. En la segunda se describe con más detalle el entorno de regulación y de mercado usados en la creación del modelo. La tercera plantea un modelo que plasma el entorno de una AFP. En la cuarta sección se muestran los resultados del modelo, y los efectos de cambios en la regulación. La quinta sección concluye el documento.

II. REGULACIÓN DE LAS AFP EN COLOMBIA

La Ley 100 sentó las bases para la creación de las administradoras de los fondos de pensiones (AFP); además, la Superintendencia Financiera es la entidad responsable de regular y vigilar las operaciones de las AFP en Colombia, tomando en cuenta lo prescrito por la ley. A continuación se exponen los elementos relevantes de esta regulación.

A. RÉGIMEN DE INVERSIÓN

Los portafolios de los fondos de pensiones deben satisfacer ciertas restricciones de inversión descritas en la Circular Externa 007 de 1996⁵, en donde se describen las inversiones admisibles; asimismo, se dan requisitos mínimos de calificación para que un activo sea admisible para inversión, y se imponen límites individuales por emisor, por emisión, por inversión en entidades vinculadas, restricciones a concentración accionaria, y a operaciones de cobertura mediante el uso de derivados. Finalmente, se enumeran los límites de inversión por clase de activos (límites globales de inversión). A continuación se enumeran los límites de inversión más relevantes:

1. Máximo 50% en deuda pública⁶
2. Máximo 10% en títulos de Fogafin y Fogacoop

⁴ Exponiendo alguna relación frente a este punto, Das y Sundaram (2002) implementan modelos que permiten concluir, para fondos en general, que una estructura de comisiones con base en incentivos, es preferible en términos de alinear los objetivos del agente y el principal.

⁵ Circular Externa 007 de 1996, de la Superintendencia Bancaria.

⁶ Este límite lo establece la Ley 100 en su artículo 100.

3. Máximo 30% en títulos de renta fija de instituciones vigiladas por la Superintendencia Financiera
4. Máximo 30% en títulos de renta fija de instituciones no vigiladas por la Superintendencia Financiera
5. Máximo 30% en títulos de renta variable
6. Máximo 5% en Fondos Comunes Ordinarios (FCO) (que entran al rubro de renta variable)
7. Máximo 2% en depósitos a la vista
8. Máximo 20% en títulos de agentes externos
9. Máximo 20% de posición descubierta en moneda extranjera
10. Mínimo 0% en todos los activos y en la exposición cambiaria descubierta

Diversos trabajos critican este tipo de imposición de límites por tipo de activo, arguyendo que se puede reducir drásticamente la eficiencia de los portafolios resultantes (Shah (1997); Solís-Soberón (1999), y Suescún (2001)). En Gómez, Jara y Pardo (2005) se concluye que de los límites anteriores, el único que afecta considerablemente la frontera eficiente es el de 20% en activos externos⁷.

B. ESQUEMA DE COTIZACIONES PARA EMPLEADOS

El artículo 20 de la Ley 100⁸ establece que en 2006 y 2007, el afiliado debe aportar para su pensión el 15,5% de su salario base de cotización (reglamentado por el Gobierno nacional de acuerdo con el tipo de salario)⁹. Este monto es dividido en tres partes: el 11% del salario base de cotización va dirigido a la cuenta individual de ahorro pensional, el 3% se da a la AFP para cubrir los gastos de administración y primas de seguros, y el 1,5% restante va al Fondo de Garantía de Pensión Mínima. El empleador debe suministrar el 75% del aporte total, y el restante 25% está a cargo del empleado; adicionalmente, es responsabilidad del empleador recaudar y trasladar a la AFP los montos correspondientes.

⁷ Con los datos y modelos de ese estudio, se asigna aproximadamente 1% de disminución promedio en la rentabilidad esperada real de los portafolios eficientes en mayo de 2005.

⁸ El cual fue modificado posteriormente por el artículo 7 de la Ley 797 de 2003.

⁹ Dicho porcentaje sólo aplica para el 2006 y 2007, pues a partir de 2008 el gobierno puede incrementarlo a 16,5% si el crecimiento económico del país ha sido igual o superior a 4%, en promedio, durante 2006 y 2007.

C. ESTRUCTURA DE COMISIONES

La Circular Externa 007 de 1996 de la Superintendencia Bancaria y la Ley 100 describen cuatro tipos de comisión que pueden cobrar las AFP¹⁰:

1. *Comisión de administración para nuevas cotizaciones*: como se vio en el punto anterior, las AFP reciben el 3% del ingreso base de cotización de cada afiliado activo, de donde deben cubrir los gastos de primas de seguros de Fogafin, y las de invalidez y sobrevivientes, descritos más adelante. Las AFP normalmente dedican alrededor del 47% de la comisión en estas primas.
2. *Comisión por administración de pensiones bajo la modalidad de retiro programado*: las AFP no pueden cobrar mensualmente más del mínimo entre el 1% del rendimiento mensual de la cuenta y el 1,5% de la mesada pensional.
3. *Comisión por administración de recursos de afiliados cesantes*¹¹: las AFP pueden cobrar como máximo el valor dado por el mínimo entre 4,5% del rendimiento mensual y el 50% de la comisión de administración para nuevas cotizaciones de ese mes, sobre el último ingreso base de cotización ajustado anualmente por inflación.
4. *Comisión por traslado de afiliados*: la AFP de la cual se traslada el afiliado puede cobrar como máximo el mínimo entre el 1% del ingreso base de cotización del último recaudo y el 1% de cuatro salarios mínimos legales vigentes.

Vale la pena resaltar algunos puntos de esta estructura. Primero, la comisión de administración no toma en cuenta el tiempo que le falta al afiliado para pensionarse. Si se supone que la comisión por administración que cobran las AFP es igual a 1,5% del ingreso base de cotización de los afiliados activos, entonces la comisión efectiva por nuevos aportes es $1,5\%/11\% = 13,6\%$, la cual

¹⁰ La primera es descrita en el artículo 20 de la Ley 100, y las otras tres en la Circular Externa 007 de 1996, de la Superintendencia Bancaria (título IV, capítulo 2).

¹¹ Afiliados que han dejado de cotizar por lo menos por tres meses consecutivos.

se paga solo una vez por cada peso aportado, sin importar si es administrado por un año o por treinta años. Este nivel de comisión es supremamente alto para alguien a quien le queda poco tiempo para pensionarse, pero es bajo para alguien quien mantendrá esos nuevos aportes por muchos años antes de retirarlos (si a un afiliado le restan treinta años para pensionarse, este costo es de aproximadamente 45 puntos básicos (pb) por año). Segundo, la comisión por administración no hace referencia al monto de ahorro de los afiliados, que puede afectar los costos de administración de los fondos. Tercero, como lo dispone el artículo 101 de la Ley 100, la totalidad del rendimiento de los fondos es propiedad de los afiliados; es decir, las AFP no pueden cobrar comisión variable según los rendimientos del fondo, lo cual puede afectar el incentivo de escoger portafolios eficientes.

Se debe mencionar que, adicionalmente, la Resolución 2549 de 1994 permite cobrar comisiones que dependen de la permanencia del afiliado en el fondo; sin embargo, en la actualidad las AFP no hacen uso de esta opción, con el fin de estimular la permanencia de sus clientes.

D. RENTABILIDAD MÍNIMA

El artículo 101 de la Ley 100 establece que las AFP deben garantizar una rentabilidad mínima (RM) a sus afiliados, y en caso de fallar con lo requerido, la AFP debe responder por el déficit, afectando inicialmente la reserva de estabilización (descrita más adelante). En caso de no poder cumplir, Fogafin debe cubrir este déficit, y en última instancia entraría el Gobierno nacional a responder. Concretamente, este déficit se define como el monto mínimo que debe ser adicionado al fondo, con corte igual a la fecha de medición, para que el rendimiento del fondo dilatado sea igual a la RM.

El Gobierno nacional, mediante la Superintendencia Financiera, define la RM en el Decreto 1592 de 2004 según la siguiente fórmula¹²:

$$(1) \quad RM = 70\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})],$$

donde

¹² El Apéndice A muestra la evolución histórica de esta fórmula.

R_S es el retorno promedio del sistema de los fondos de pensiones, ponderado por el tamaño de los fondos (acotado superiormente por 20%); R_{RVL} es el retorno del índice accionario IGBC; R_{RVE} es el retorno (en pesos) del índice accionario S & P 500; R_{PR} es el retorno del portafolio de referencia, definido por la Superintendencia Financiera, y conformado en su mayoría por deuda pública interna, CDT y títulos comerciales; α es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en acciones locales; β es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en renta variable externa.

Con la intención de promover inversiones con horizontes de largo plazo, los cálculos se hacen trimestralmente sobre retornos trianuales. Los porcentajes relevantes (α y β) se calculan promediando los porcentajes diarios durante los tres años del cálculo, y los retornos de los fondos se definen como la tasa interna de retorno (TIR) de los flujos de caja definidos por:

- Valor inicial del fondo (entrada)
- Nuevos aportes al fondo en los tiempos que corresponden (entrada)
- Transferencias de fondos (por traspasos y pensiones) del y al fondo en los tiempos que corresponden (salida y entrada)
- Valor final del fondo (salida): la RM se calcula de la misma forma usando como entradas el valor inicial de los portafolios y los ajustes (por rebalanceo, pago de dividendos y de cupones), y como salida el valor final de los portafolios. En el Anexo 1 se compara el rendimiento de los fondos con la RM desde 1999.

Varias preguntas surgen en este primer acercamiento:

- ¿Es posible que un efecto manada natural sea exacerbado por esta reglamentación?
- ¿Qué efecto tiene la RM sobre el comportamiento de las AFP, y en particular sobre la composición de los portafolios pensionales?, y ¿es posible que ella incentive invertir en portafolios ineficientes al forzar a las AFP a pensar en su propio riesgo, más que en el riesgo de sus afiliados?

- ¿El uso de retornos trianuales en la medición efectivamente incentiva inversiones con horizontes a largo plazo, o es posible que la medida obligue a los fondos a concentrarse en los meses del futuro inmediato?
- ¿Cuál es el objetivo de la RM? ¿Se está logrando este objetivo?
- ¿Es posible que la RM esté causando una escasa diversificación del ahorro pensional agregado colombiano, mediante el incentivo que genera en los fondos por tener inversiones similares?
- Al notar que la RM es una opción *put* con *strike* (precio de venta) móvil, el cual posee el afiliado sobre sus ahorros, vale la pena preguntar cuál es el costo de esta *put*; igualmente, sería interesante cuestionar cómo paga el afiliado por ella, y conjeturar que el costo se refleja posiblemente en inversiones ineficientes por parte de la AFP; así, ¿esto está en línea con las preferencias del ahorrador colombiano? Finalmente, como se observa en el Anexo A, la RM fue reducida sustancialmente en el año 2004. Efectivamente lo que se hizo fue reducir el *strike* en un 22%. Si a un dueño de una opción *put* le reducen su *strike*, éste debería obtener una compensación por dicho cambio, pero en el caso del ahorrador colombiano nunca se efectuó tal compensación. Esto puede hacer pensar que el ahorrador colombiano está pagando una prima por un contrato que puede ser alterado unilateralmente sin tener derecho a compensación, y reforzar la posibilidad de que el ahorrador promedio no desea comprar esta opción.

E. RESERVA DE ESTABILIZACIÓN

Para garantizar un mínimo de cumplimiento de la RM, la hoy Superintendencia Financiera, mediante el decreto 721 de 1994, creó la reserva de estabilización para las AFP: cada AFP debe participar con su propio capital en al menos el 1% del fondo de pensiones administrado, reserva que será usada inmediatamente para cubrir déficits causados por incumplimiento de la RM, si estos existen. Es interesante notar que, indirectamente, esta figura provee al sistema de un incentivo para realizar inversiones eficientes, aunque por ahora éste no sea muy grande; en la medida en que los fondos crezcan, el 1% será cada vez un monto más importante para las AFP, y el rendimiento de los fondos será una línea importante en los ingresos mensuales de la AFP.

F. MARGEN DE SOLVENCIA

En el decreto 1797 de 1999 se estipula que el valor de los activos administrados por las AFP, excluyendo los emitidos o avalados por la Nación, y excluyendo la reserva de estabilización, no puede ser mayor que 48 veces su patrimonio técnico.

G. SEGUROS A CARGO DE LA AFP

Como se mencionó anteriormente, es responsabilidad de cada AFP contratar los seguros previsionales para sus afiliados; las primas son cubiertas por la comisión de administración para nuevas cotizaciones. Hay dos tipos de eventualidades que requieren la compra de estos seguros: la primera es una posible carencia de recursos por parte de la AFP para cubrir defectos en la RM. En estos casos Fogafin debe responder por estos defectos para lo cual la AFP contrata con Fogafin un seguro en el momento en que nuevas cotizaciones llegan al fondo. La segunda es una posible carencia de fondos en la cuenta individual (y bono pensional, si a él hubiere lugar) para cubrir las pensiones por invalidez y a sobrevivientes, en el caso de afiliados (o familiares) que cumplan con requisitos mínimos de tiempo cotizado y tuvieran derecho a estas pensiones¹³. La aseguradora contratada debe cubrir esta carencia.

H. GARANTÍAS DEL ESTADO

En el caso del sistema de pensiones obligatorias, el Estado (no la AFP ni las aseguradoras) es responsable de garantizar a los afiliados como mínimo una pensión de un salario mínimo legal vigente (SMLV) para las pensiones de vejez, invalidez

¹³ En caso de muerte de un pensionado, los beneficiarios (definidos en el Artículo 74 de la Ley 100) tienen derecho a seguir recibiendo el 100% de la pensión. En caso de muerte de un afiliado no pensionado, los beneficiarios reciben el 45% del ingreso base de liquidación más 2% por cada cincuenta semanas cotizadas por encima de las 500 (sin que el monto total exceda 75%). En ningún caso la pensión puede ser menor que un SMLV. La pensión se paga por un intervalo de tiempo que depende del caso. Los requisitos para poder acceder a ésta son que el afiliado tuviera más de 20 años y, además, si la muerte fue accidental, que hubiera cotizado como mínimo el 20% del tiempo entre los 20 años y su muerte; si la muerte es por enfermedad, se requiere que hubiera cotizado mínimo el 25% de este intervalo (artículos 73, 46 y 48 de la Ley 100). El seguro de invalidez tiene especificaciones similares, reconociéndola a trabajadores que hayan perdido al menos el 50% de su capacidad laboral.

y sobrevivientes, cuando a ellas tuviera derecho el afiliado o sus sobrevivientes. En el caso de pensión por vejez, un afiliado tiene derecho a esta pensión mínima si cumplió 57 años en el caso de mujeres y 62 en el de hombres, y cotizó mínimo 1.150 semanas (artículo 65 de la Ley 100). Este es un punto de constante discusión, ya que una gran parte de la fuerza laboral cotiza a intervalos intermitentes, y posiblemente no podrá acumular el mínimo exigido de semanas cotizadas: por ejemplo, Ayala y Acosta (2002) exponen los serios problemas del diseño e implementación del sistema pensional, señalando en particular el alto costo de la garantía de la pensión mínima, por estar ligada con el nivel del salario mínimo, lo cual ha generado restricciones severas representadas en el tiempo mínimo de cotización necesaria.

III. MODELO DEL ENTORNO DE UNA AFP

Se visualiza a una AFP como una empresa cuyas directivas tienen como objetivo maximizar la utilidad esperada de sus accionistas, la cual depende, en parte, de las decisiones que toma la AFP con respecto a variables que están bajo su control; además, las decisiones deben cumplir con la regulación de los FPO y de las instituciones financieras en general. El objetivo es construir un modelo del entorno de las AFP que permita determinar sus decisiones “óptimas”, en particular, con respecto a la composición del fondo administrado. Intuitivamente, si se considera una AFP pequeña, recién entrada al mercado, el modelo pretende, dadas unas suposiciones y simplificaciones de la práctica, determinar las decisiones racionales óptimas que debería seguir dicha AFP.

Se denota con T el horizonte de inversión de los accionistas de la AFP, en donde el sistema se describe con un conjunto de variables de estado que evolucionan en el transcurso del tiempo de manera discreta (se divide T en períodos de un año); esta evolución depende de las variables controladas por la AFP (determinadas al comienzo de cada período), y de factores aleatorios externos, tales como los retornos de los activos que componen el fondo de pensiones.

Se procede suponiendo un nivel de aversión al riesgo de la AFP y una forma funcional de su utilidad; luego, se permite evolucionar el modelo repetidas veces mediante simulaciones. El comportamiento óptimo de la AFP es aquél que maximiza la utilidad del rendimiento del capital, promediando ésta a lo largo de las simulaciones.

En esta sección se describen los activos transables, las variables de control, las variables de estado, las relaciones entre las variables y las preferencias de la AFP¹⁴.

A. *ACTIVOS TRANSABLES Y LÍMITES DE INVERSIÓN*

Dada la necesidad de reducir la dimensionalidad del problema, se toman once clases representativas de activos en los cuales los fondos pueden invertir:

- TES tasa fija de corto plazo (*TCP*)
- TES tasa fija de largo plazo (*TLP*)
- TES ligados a la inflación (UVR e IPC) (*TUVR*)
- Bonos corporativos colombianos (*BCC*)
- Renta variable local (*RVL*)
- Deuda externa colombiana (*YANK*)
- Deuda gubernamental de países desarrollados (*DGD*)
- Deuda gubernamental externa de países emergentes con calificación aceptable (*DEGE*)
- Deuda gubernamental interna de países emergentes con calificación aceptable (*DIGE*)
- Deuda corporativa externa (*DCE*)
- Renta variable externa (*RVE*)

En adición, se incluye la posibilidad de cubrir la exposición en moneda externa mediante *forwards* (*FWD*) (monedas distintas al dólar pueden ser cubiertas contra el peso haciendo dos derivados y usando el dólar como moneda intermedia); con esto, se usará $N = 12$ como el número de instrumentos de inversión, teniendo en cuenta que cualquier portafolio $w = [w_1, w_2, \dots, w_{12}]$ debe satisfacer $w_1 + w_2 + \dots + w_{12} = 100\%$.

Los límites de inversión son los expuestos en la sección I. Por razones prácticas se opta por modificar los siguientes límites:

¹⁴ Un tratamiento más detallado de las ecuaciones de evolución puede encontrarse en un artículo con el mismo título publicado en la serie borradores de Economía, del Banco de la República (http://www.banrep.gov.co/publicaciones/pub_borra.htm).

1. $TCP + TLP TUVR + YANK \leq 60\%$ (el 50% de la regulación se ajusta por la posibilidad de inversión en deuda similar en riesgo a deuda pública, como bonos Fogafin).
2. $RVL \leq 20\%$ (se baja del 30% de la regulación para ajustar por la poca profundidad del mercado)
3. $BCC \leq 30\%$ (se baja de 60% de la regulación para ajustar por la poca oferta en el mercado)
4. $0\% \leq FWD \leq 30\%$ (esta cantidad también modela una restricción de profundidad de mercado)

B. VARIABLES DE CONTROL

1. w_{PORT} ($N \times 1$): vector que indica la tenencia porcentual del fondo de pensiones en cada activo.
2. w_{TESOR} ($N \times 1$): vector que indica la tenencia porcentual de la AFP en cada activo, que corresponde a actividades de tesorería.
3. DIV : porcentaje del patrimonio que excede la reserva de estabilización y la restricción de solvencia, por ser repartido en cada período a los accionistas.
4. RE : porcentaje del fondo asignado a la reserva de estabilización.

Estas variables pueden cambiar con el transcurso del tiempo. Las restricciones de w_{PORT} se dieron en la sección anterior, otras restricciones de estas variables son:

1. $0\% \leq DIV \leq 100\%$
2. $1\% \leq RE \leq 100\%$

Por simplicidad dimensional, en los casos más generales se supondrá que w_{TESOR} es dado, para la cual se usará un portafolio eficiente, dada la regulación de los FPO. Se debe tener en cuenta que este portafolio no tiene tales restricciones. En los casos sencillos, se supondrá igualmente que este portafolio debe satisfacer las restricciones de los FPO, por simplicidad.

C. VARIABLES DE ESTADO

Las variables que definen el estado del sistema en cada período t ($t = 1, 2, \dots, T$) se resumen a continuación, usando agrupaciones de acuerdo con su naturaleza:

- *Retornos.* Este grupo se compone por los retornos de los activos del modelo, del fondo de pensiones analizado, del promedio del sistema de fondos, del portafolio de referencia, del portafolio de la tesorería de la AFP, y del retorno trianual (anualizado) del fondo; finalmente, incluye la rentabilidad mínima vigente para el período.
- *Ingresos.* Se consideran los ingresos por comisiones, por valoración de la reserva de estabilización, y por valoración del portafolio de tesorería.
- *Costos.* para cada período se toman los costos de personal e infraestructura, de publicidad y propaganda, los pagos de impuestos, los egresos por violación de la rentabilidad mínima, y se deja un espacio general para otros costos.
- *Información del fondo.* El modelo requiere seguir la información del número de afiliados, nuevos aportes, tamaño del fondo, nuevos pensionados (en cada período), retiros del fondo por los nuevos pensionados y el nivel promedio de salarios de los afiliados de la AFP.
- *Información del sistema de fondos.* Se compone del total agregado de gastos en personal e infraestructura, el tamaño total del sistema de fondos, su número de afiliados, los nuevos afiliados y pensionados (en cada período), los retiros de los fondos por estos nuevos pensionados, y el nivel promedio de salario de los afiliados al sistema.
- *Variables contables.* Este grupo está compuesto por el capital inicial invertido por accionistas en la AFP, el tamaño de la reserva de estabilización y del portafolio de tesorería, el patrimonio de la AFP, los dividendos repartidos en cada período, junto con los ingresos y egresos.
- *Variables iniciales.* La edad de retiro¹⁵ y la edad promedio inicial de los afiliados a la AFP se toman como condiciones iniciales; asimismo, dada la estructura de evolución del sistema descrita más adelante, es necesario tener condiciones iniciales para las variables de costos, de información del fondo y del sistema, y de rubros contables¹⁶.

¹⁵ Se usa 60 como edad promedio de retiro.

¹⁶ Para esto se toma la información de un fondo específico pequeño disponible a noviembre de

Para las variables de retornos, ingresos, costos, y tres rubros contables (dividendos, ingresos y egresos), se entienden las cantidades determinadas para el período t , como lo sucedido entre $t - 1$ y t . Las demás variables se interpretan como cantidades existentes en el tiempo t . Intuitivamente, cada período comienza con el nuevo aporte de los afiliados.

D. EVOLUCIÓN DEL SISTEMA

1. Retornos

Se simplifica la incertidumbre de los retornos de los activos transables con una suposición de distribución normal multidimensional: específicamente, escribiendo el vector de retornos de los activos transables como $r(t) = [r_1(t) r_2(t) \dots r_N(t)]$, se supone

$$r(t) \sim \mathfrak{N}(\mu, \Sigma),$$

donde μ , y Σ son los retornos esperados anuales y la matriz de varianza-covarianza, respectivamente; esta matriz es derivada de los cuadros A1.2 y A1.3 en el Anexo 1, parte II. La determinación de esta distribución es basada en la metodología expuesta en Gómez, Jara y Pardo (2005), para lo cual se usa un modelo *forward-looking* para los retornos esperados, y volatilidades históricas para la matriz de covarianza (las fuentes y construcción de las series de tiempo están descritas en el mismo Anexo 1). Dado el desconocimiento de la información económica y financiera que puede llegar en el futuro, se supone que la distribución se mantiene constante para los períodos futuros.

Con respecto a la rentabilidad mínima, se toma la especificación actual de la regulación:

$$(3) \quad \alpha_R \times (\alpha_p \times R_{SIST}(t) + (1 - \alpha_p) \times R_{PR}(t)),$$

donde α_R y α_p asumen los valores 70% y 50%, respectivamente, y los retornos del sistema y del portafolio de referencia son tomados sobre un período de tres años.

2005. con datos de la Superintendencia Financiera y cálculos del autor, los cuales se reseñan en el Anexo 1, parte III.

2. Número de afiliados y pensionados

Es natural suponer que el número de afiliados de un fondo depende de su retorno trianual (que es la información dada por la Superintendencia Financiera), de los costos de publicidad y de los costos de personal e infraestructura. Como se muestra en el Anexo 1, parte III, la única variable estadísticamente significativa resultante de un estudio de panel de los seis fondos es la última; así, se propone que la proporción del total de nuevos afiliados en el sistema que eligen la AFP dada depende únicamente de la proporción del costo total del sistema en personal e infraestructura incurrida por la AFP¹⁷; adicionalmente, el modelo considera los siguientes puntos:

- Se incluye un elemento estocástico calibrado a la volatilidad del residuo de la regresión.
- Se ajusta por la proporción de afiliados que se pensionan en cada período, para lo cual, se supone que la edad inicial promedio de los afiliados es constante. Dada la joven población cotizante en la actualidad, se supone además que esta es la edad de los nuevos afiliados; finalmente, se toma en cuenta la pirámide poblacional que surge naturalmente en este cálculo.
- Una regresión lineal simple, usando los datos de los últimos cuatro años más recientes, arroja la siguiente expresión para el número de nuevos afiliados en el sistema en el período t , en donde la fecha base ($t = 0$) es noviembre de 2005 (véase Anexo 1, parte III):

$$(4) \quad \eta(t) = 596.000 + 66.500 \times t$$

- Se usa 6.315.000, el cual es el número de afiliados en el sistema a septiembre de 2005) como el número inicial de afiliados.
- El porcentaje de nuevos pensionados se supone constante a través de todos los fondos.

¹⁷ Esta regresión permite aceptar un coeficiente igual a 1, condición necesaria para que los afiliados nuevos al sistema se repartan entre las AFP (Anexo 1, parte III).

3. Variables de información del fondo y del sistema

Las variables de información restantes se obtienen al mezclar las condiciones dadas por la regulación con los siguientes puntos:

- El nivel de salarios del fondo analizado y del sistema de fondos se supone creciente de acuerdo con la inflación.
- El nivel inicial de salarios se calcula con información reciente de la comisión de administración y del número de afiliados activos.
- Se usa la información de afiliados dada por la Superintendencia Financiera para establecer una proporción de cesantes de 40% sobre el total de afiliados.
- Se supone que todas las contribuciones al fondo se hacen al comienzo de cada período.
- Se supone que los nuevos pensionados retiran todos sus ahorros para contratar externamente una renta vitalicia.

4. Ingresos

Se usa 1,6% como constante que representa las comisiones retenidas por las AFP sobre las nuevas cotizaciones; este valor se obtiene al promediar los datos publicados por la Superintendencia Financiera (se excluye el monto necesario para el pago de las primas a Fogafin que, en promedio, se aproximan a 0,2% del salario base de cotización). Para la comisión por el manejo de afiliados cesantes se usa la constante $50\% / 2 = 25\%$ a manera de aproximación de la fórmula definida para esta comisión, y se entiende este porcentaje como la comisión cobrada a afiliados cesantes, dividida por la cobrada a los activos. Las comisiones en el tiempo t forman parte del ingreso en el período $t \rightarrow t + 1$.

5. Costos

Un análisis exhaustivo de regresiones lineales del costo de una AFP en personal e infraestructura sobre distintos conjuntos de variables disponibles permite concluir

que se puede usar como variable dependiente única el cambio en el tamaño del fondo (Anexo 1, sección III). Se usa el mismo esquema para el costo incurrido por el sistema agregado.

Los costos de publicidad y los otros costos se modelan linealmente y dependen de los ingresos, el número de afiliados y el tamaño del fondo (tomando estas variables del período anterior); la incertidumbre se tiene en cuenta, incluyendo la variabilidad de los residuos en las ecuaciones de evolución.

El costo potencial incurrido por violar la rentabilidad mínima se toma directamente de su definición regulatoria; así, el monto que la AFP debe desembolsar en caso de violar la rentabilidad mínima es la cantidad faltante para que el tamaño del fondo (ajustando por nuevas entradas y salidas) sea igual al tamaño inicial, multiplicado por la rentabilidad mínima en tres años (véase la sección IV). Se simplifica este cálculo, tomando como tamaño inicial su tamaño final, reducido por la rentabilidad trianual del fondo.

Finalmente, la tasa impositiva para las AFP se estima alrededor de $\alpha_{IMP} = 32\%$, considerando datos de pagos de impuestos y de ingresos y egresos suministrados por la Superintendencia Financiera. El costo impositivo total se calcula multiplicando esta tasa por los ingresos netos de los costos anteriores.

6. Variables contables

Los totales de ingresos y costos de la AFP se toman de las variables anteriores, mientras que para las otras variables contables se establece una regla con la intención de precisar de forma práctica la distribución de dividendos a accionistas de la AFP: cuando no haya suficiente capital para cubrir la razón de solvencia, se vende la AFP a un precio igual al patrimonio, y una fracción (75%) del valor recibido se reparte como un dividendo final a los accionistas¹⁸. Asimismo, se obliga

¹⁸ Esta fracción pretende representar un costo de transacción que puede traer la urgencia de vender una compañía, y además penaliza estrategias que inicialmente reparten dividendos muy altos a riesgo de volver insolvente la AFP en el futuro. Otra alternativa posiblemente más realista es exigir a los accionistas poner más capital para suplir esta necesidad, o captar capital externamente, pero ésta parece una solución menos práctica para el presente modelo, y su valor agregado, en términos de estrategias óptimas, puede ser pequeño.

a la AFP a permanecer constantemente con un patrimonio por encima de 2% del tamaño del fondo para evitar descapitalizaciones poco prácticas e irreales. Cabe anotar que si la AFP puede cubrir la razón de solvencia, entonces cumple automáticamente con la restricción de la reserva de estabilización, dados los límites inferiores para cada una, y el hecho de que no se puede tener más del 50% del fondo en deuda pública. Una vez se liquida la AFP, a todas las variables se les asigna un valor de 0 en períodos futuros. Finalmente, en el último período del horizonte de análisis (T) se asigna un dividendo igual al patrimonio para dicho tiempo.

E. COMPORTAMIENTO DE LA AFP

Para terminar con la definición del modelo se debe determinar el objetivo de una AFP. Para esto se supone que la AFP se comporta como un agente maximizador de su utilidad esperada, la cual se construye de tal manera que solo dependa de los flujos de caja generados por el pago del capital inicial, y por el reparto de dividendos¹⁹. Específicamente, se resume esta información en la TIR de estos flujos de caja²⁰. Formalmente, llamando CAP_0 el capital inicial neto de la AFP, y $K_{DIV}(t)$ y $K_{RE}(t)$ los dividendos repartidos y el tamaño de la reserva de estabilización, respectivamente, en el tiempo t , la AFP debe resolver el siguiente problema:

$$\max E \left[U \left(TIR(-CAP_0, K_{DIV}(1), \dots, K_{DIV}(T)) \right) \right] \\ \{w_{PORT}(t), w_{TESOR}(t), K_{DIV}(t), K_{RE}(t)\}$$

en donde la maximización está sujeta a las restricciones siguientes: límites de inversión para w_{PORT} y w_{TESOR} ; tamaño del fondo excluyendo deuda pública $\leq 48 \times$ Patrimonio de la AFP; $0\% \leq DIV \leq 100\%$; $1\% \leq RE \leq 100\%$.

La dependencia temporal de las variables de control definen éste como un problema de control estocástico; es decir, en cada período estas variables usan la información

¹⁹ El capital inicial (en $t = 0$) se supone igual al patrimonio inicial de la AFP base, en donde se permite el reparto de dividendos en $t = 0$, que equivale a aportar menos capital.

²⁰ Esta TIR está bien definida, ya que por construcción los dividendos repartidos nunca son negativos. Dado que el insumo de la función de utilidad es una tasa de retorno, se usa el coeficiente absoluto de aversión al riesgo. Una alternativa posible para un estudio futuro sería usar el coeficiente relativo, que se utiliza normalmente cuando el insumo es el nivel de riqueza.

disponible hasta ese momento, y maximizan la utilidad esperada de la TIR (que se calcula desde $t = 0$ hasta $t = T$; esto es, conociendo “parcialmente” la TIR).

Por simplicidad, se trabaja con una función de utilidad con coeficiente absoluto de aversión al riesgo (CARA por sus siglas en inglés) constante²¹; es decir, se usa la siguiente forma funcional:

$$U(R) = -e^{-\theta R},$$

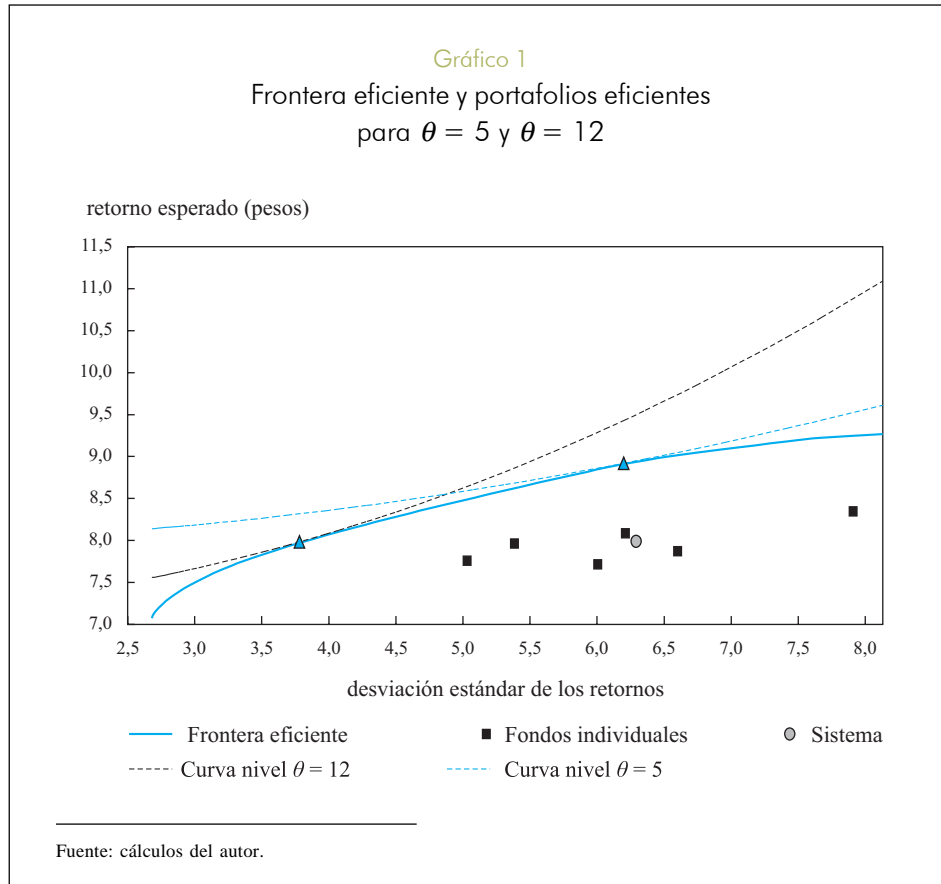
donde θ es el parámetro de aversión al riesgo del agente. Se observan dos puntos: primero, el efecto intertemporal está factorizado en el cálculo de la TIR; segundo, el agente optimizador es el accionista de la AFP (posiblemente mediante su Junta Directiva); así, el consumo intertemporal de este agente se da mediante el reparto de dividendos. La escogencia de θ para la implementación del modelo se basa en la situación presentada a enero de 2006 del sistema de fondos. Se escogen dos portafolios eficientes: el primero tiene el mismo retorno esperado que el sistema de los fondos, y el segundo tiene el mismo riesgo. Para cada portafolio se encuentra el valor de θ que debe tener un inversionista para que su portafolio óptimo sea precisamente el considerado. Este procedimiento arroja dos valores²²: $\theta = 5$ y 12 . El Gráfico 1 resume estos puntos dentro del contexto de la frontera eficiente.

IV. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS

En el modelo hay 24 variables de control no redundantes, que deben ser resueltas en términos de las variables de estado para cualquier período. Es claro que esta dimensionalidad, junto con la naturaleza estocástica del control, requieren simplificaciones antes de proceder a implementar el modelo; por esto, se presentan varias simplificaciones para proceder con el análisis: primero, se trabaja con un período, en donde se supone que no hay rentabilidad mínima. Segundo, se incluye la rentabilidad

²¹ Dado que el insumo de la función de utilidad es una tasa de retorno, se usa el coeficiente absoluto de aversión al riesgo. Una alternativa posible para un estudio futuro sería usar el coeficiente relativo, que se utiliza normalmente cuando el insumo es el nivel de riqueza.

²² Una explicación acerca de la magnitud de estos números puede darse como sigue: un inversionista, que corresponde a $\theta = 12$, es indiferente entre un retorno seguro de 5%, y un retorno incierto de 10%, con 65% de probabilidad, y 0%, con 35% de probabilidad, mientras que el inversionista que corresponde a $\theta = 5$ cambia estas probabilidades de indiferencia a 56% y 44%, reflejando así su menor aversión al riesgo.



mínima en un período; sin embargo, en este caso no existe una solución analítica. Para proceder con la solución numérica, se hacen suposiciones fuertes sobre la naturaleza del portafolio de tesorería con el fin de reducir la dimensionalidad del problema²³. Por último, se extiende este esquema al caso de varios períodos. Dada la dimensionalidad del problema, es computacionalmente complejo resolverlo en términos generales, con la tecnología disponible en la actualidad. Por

²³ Esta etapa también puede interpretarse, dadas unas variables de estado iniciales posiblemente distintas a las del período 0, como la solución al problema del control estocástico para el último período, que es el punto de arranque para resolver el problema general trabajando hacia atrás en el tiempo con el esquema de *backward-induction*, el cual es usado generalmente para resolver numéricamente problemas de control estocástico.

esto, se simplifica suponiendo que las variables de control deben fijarse en el período 0. A pesar de esta fuerte simplificación, los resultados pueden ser tomados como una guía para entender el efecto de la regulación en el comportamiento de las AFP; así, se varían elementos regulatorios para mostrar su efecto sobre el portafolio de inversión del fondo de pensiones administrado por la AFP. Para simplificar el análisis de resultados, los portafolios encontrados se representan en el espacio media-varianza.

A. UN PERÍODO

1. Regulación actual, excluyendo la rentabilidad mínima

Sea Q_0 el nivel de capital neto inicial; es decir, el capital inicial menos el dividendo que se reparte inmediatamente. Si Q_1 es el capital final de la AFP, entonces la TIR del período es $TIR = Q_1 / Q_0 - 1$; esto significa que $TIR = (\text{ingresos} - \text{egresos}) / Q_0$, donde estas variables son las incurridas durante el período de estudio. En el Anexo 1, sección IV se demuestra que en ausencia de rentabilidad mínima, la AFP maximiza su utilidad esperada escogiendo el portafolio eficiente de un inversionista con aversión al riesgo:

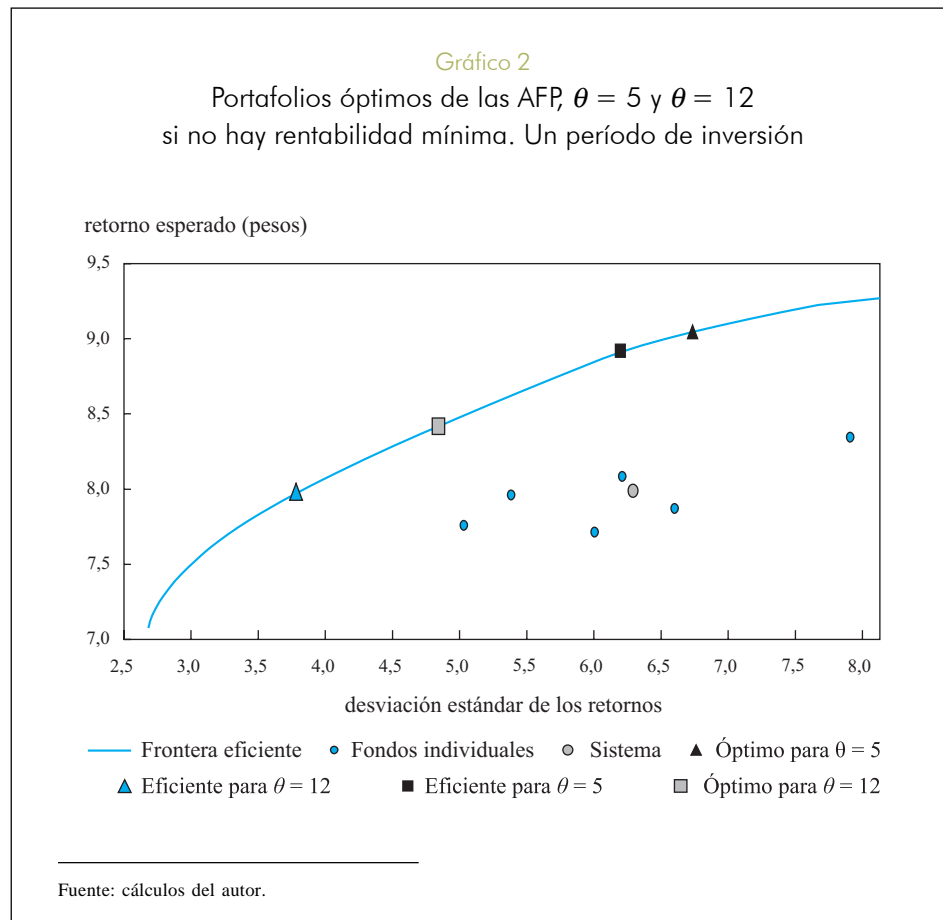
$$(7) \quad \Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP}) \left(1 - \frac{c_0 J_{TAM}(0)}{K_{CAP}} \right),$$

donde θ es la aversión al riesgo de la AFP, y las variables α_{IMP} , c_0 , $J_{TAM}(0)$, K_{CAP} son, respectivamente, la tasa de impuestos, una constante de regresión del costo en personal de la AFP, el tamaño inicial del fondo y el capital inicial del fondo (Anexo 1, sección III). Dado que $\Theta < \theta$ (Anexo 1, sección IV), el portafolio óptimo para una AFP, para el caso de un período en ausencia de rentabilidad mínima, es el portafolio eficiente que escogería un agente con menor aversión al riesgo que la AFP. Esta disminución de la aversión al riesgo revelada se atribuye al impacto suavizador de los impuestos y a la dependencia de los costos (específicamente el de personal e infraestructura) sobre el incremento en el tamaño del fondo, lo cual hace decrecer el beneficio que la AFP deriva por buenos retornos en el fondo. Debe recordarse que estas preferencias, y en particular esta aversión al riesgo, son independientes de las preferencias y aversión al riesgo de los afiliados al sistema, cuyos ahorros conforman el fondo de pensiones. En particular, el portafolio eficiente escogido por la AFP puede desviarse considerablemente del portafolio preferido por el afiliado.

En el Gráfico 2 se muestran los portafolios óptimos de escogencia para la AFP en el plano media-varianza, con los datos usados a lo largo del análisis, los cuales se contrastan contra los portafolios eficientes que escogería un inversionista racional con igual aversión al riesgo que la AFP.

2. Un período, incluyendo rentabilidad mínima

Al adicionar el costo de la rentabilidad mínima, el problema deja de tener solución analítica. Para simplificar la dimensionalidad del problema, se adopta la suposición adicional de que el portafolio de tesorería de la AFP es eficiente con



bajo riesgo, para reflejar la necesidad de liquidez que la AFP puede tener con este portafolio.

Dada la dimensionalidad del problema, se implementa un algoritmo genético dentro de un esquema de simulación para encontrar la solución a este problema: se simulan 10.000 posibles trayectorias (para los retornos y demás variables aleatorias del modelo), para determinar, dados los parámetros, la utilidad esperada; luego, el algoritmo genético se usa para encontrar los parámetros que optimizan esta utilidad esperada²⁴. Manteniendo la notación de la sección IV, se corren seis escenarios para dos niveles de aversión al riesgo ($\theta = 5$ y $\theta = 12$):

1. *Caso base*: regulación actual.
2. 100% *RM*, solo *PR*: la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times [\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR}]$, y todo lo demás permanece igual.
3. *RM actual, PR eficiente*: todo permanece igual, excepto que se usa un portafolio eficiente como portafolio de referencia para el cálculo de la rentabilidad mínima²⁵.
4. 100% *RM*: la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})]$, y todo lo demás permanece igual.
5. 100% *RM*, solo *SIST*: la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times R_S$, y todo lo demás permanece igual.
6. *Comisión variable*: se cambia el sistema actual de comisiones, y se reemplaza por uno en donde las AFP cobran como comisión el 15% de los rendimientos de las cuentas individuales, en caso de ser positivos, y cero si los rendimientos son negativos.

²⁴ Se usan 20.000 generaciones, 29 raíces aleatorias y una semilla. Una "corrida" del modelo con estas especificaciones dura alrededor de 1,5 horas; sin embargo, una convergencia razonable se da normalmente dentro de las primeras 500 generaciones.

²⁵ Se usa un portafolio eficiente que está casi en la mitad de los que escogerían inversionistas con aversión al riesgo: $\theta = 5$ y $\theta = 12$.

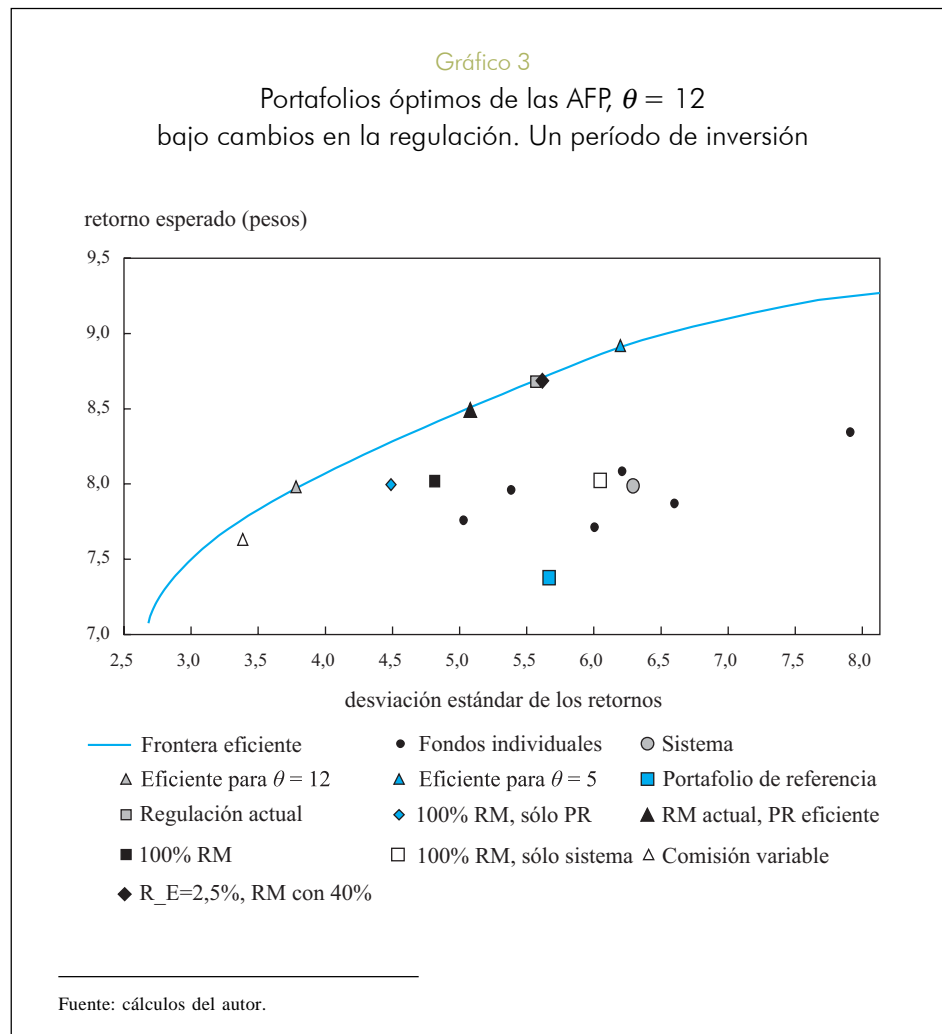
7. $R_E = 2,5\%$, RM con 40% : se exige que la AFP sea dueña de $2,5\%$, del fondo mediante la reserva de estabilización, y se relaja la rentabilidad mínima para ser calculada mediante la fórmula

$$RM = 40\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})].$$

Cada escenario se corre cinco veces, partiendo de distintas semillas. Los resultados de cada corrida son los portafolios, el nivel de dividendos y el tamaño de la reserva de estabilización para la AFP modelada. Los resultados completos se exhiben en el Anexo 1, sección V, y a continuación se muestran los resultados, representando los portafolios óptimos para cada caso en el espacio media-varianza para reducir la dimensionalidad, y facilitar comparaciones, y simultáneamente se grafican la frontera eficiente, los portafolios de los fondos de pensiones, el portafolio de referencia, el portafolio del sistema, y los portafolios que escogerían inversionistas con aversión al riesgo $\theta = 5$ y $\theta = 12$.

En el Gráfico 3 se puede observar que el portafolio óptimo (el que debería escoger una AFP según el modelo de su entorno) es uno eficiente; así, en el caso de un período, la rentabilidad mínima actual no parece perjudicar la eficiencia de los fondos. Es importante notar que la rentabilidad mínima es trianual; luego al considerar la situación a enero 2006 de los fondos, era poco probable que en un solo período violaran este mínimo. Combinando esto con el capital que la AFP tiene en la reserva de estabilización, es razonable entender que lo óptimo es invertir el fondo en un portafolio eficiente. Al cambiar la especificación de la rentabilidad mínima se observan transformaciones en lo que sería el comportamiento óptimo: al usar una rentabilidad mínima con un multiplicador de 100% (a cambio de 70%), es decir, más cercana a la existente antes de 2004, se sacrifica eficiencia en el fondo. Llevando el ejemplo más lejos, si se define la rentabilidad mínima ignorando el portafolio de referencia y manteniendo el multiplicador de 100% , lo óptimo para el fondo estudiado es imitar cercanamente el perfil de riesgo-retorno del sistema de fondos; Esto significa que en casos extremos el modelo permite concluir que las AFP racionales deberían replicar con su fondo administrado el portafolio del sistema de los fondos. Finalmente, cuando se reemplaza el esquema actual de comisiones, por uno de comisión totalmente variable dependiente del rendimiento del fondo, la AFP maximizaría su utilidad escogiendo un portafolio muy cercano a la frontera eficiente, pero con un nivel de riesgo mucho menor que los demás portafolios que resultan del ejercicio. La interpretación de este hecho se desprende de observar que si la AFP toma riesgos altos (así sean eficientes), incrementa la probabilidad de no cobrar comisión, ya que presentaría pérdidas en el fondo

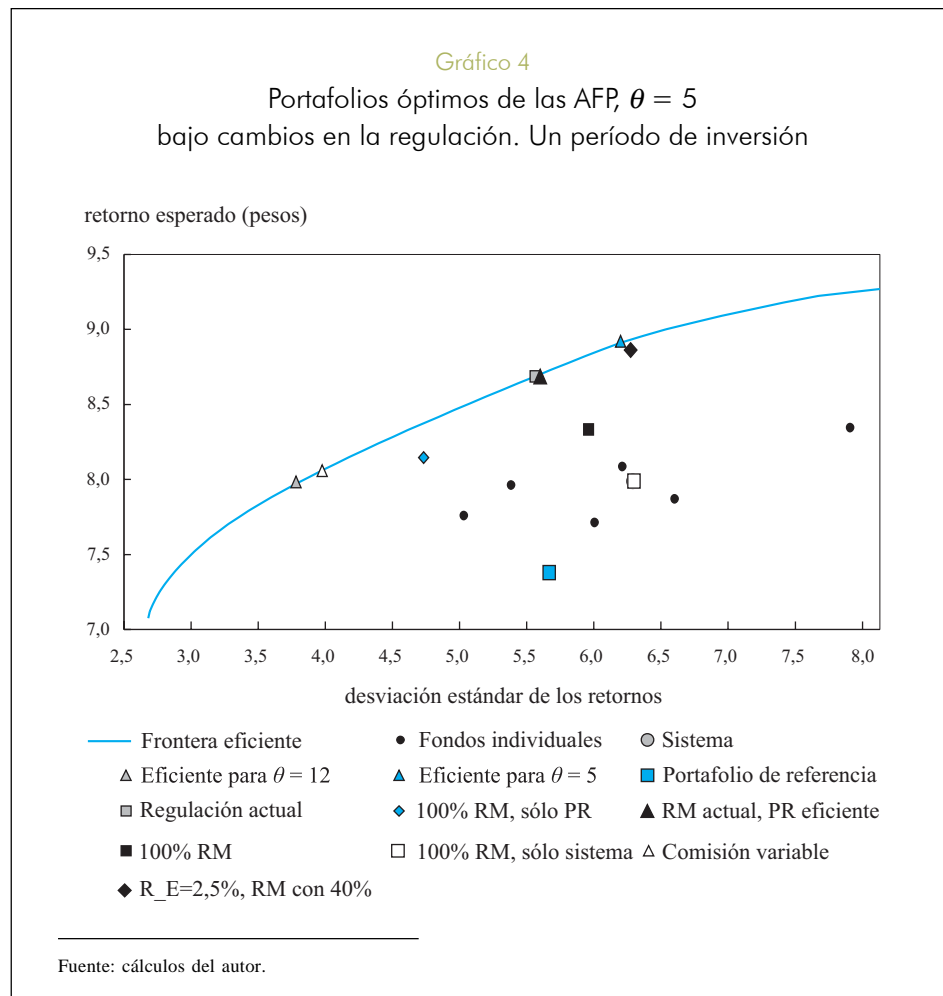
administrado. Con portafolios menos riesgosos se asegura una comisión mucho más estable, consistente con las preferencias de una AFP aversa al riesgo. Es importante notar que en este caso se motiva a la AFP a invertir en portafolios eficientes: cuando se obliga a la AFP a tener un porcentaje más amplio en la reserva de estabilización, el portafolio óptimo es uno eficiente con un nivel de riesgo alto, es decir, se corrobora la intuición de que alinear los incentivos de las AFP y sus afiliados más explícitamente sería benéfico para la eficiencia de los ahorros.



En el Gráfico 4 analiza una AFP menos aversa al riesgo; este cambio es evidente cuando los portafolios óptimos, desde distintas regulaciones, tienden a moverse hacia la derecha, es decir, hacia portafolios más riesgosos.

B. MÚLTIPLES PERÍODOS

Se procede igual que en la sección anterior, con la diferencia de que se establece un horizonte de $T = 5$ años. Una vez más, los resultados completos se exhiben en



el Anexo 1, sección V, y por simplicidad de interpretación nuevamente se grafican los resultados en el espacio media-varianza. Asimismo, se repite el análisis con dos niveles de aversión al riesgo: $\theta = 5$ y $\theta = 12$. Se repite el esquema de 10.000 simulaciones para cada conjunto de parámetros (los pesos del portafolio, el porcentaje de repartición de dividendos y el nivel porcentual de la reserva de estabilización), encontrando para cada conjunto la utilidad esperada de la AFP. Luego se maximiza esta utilidad esperada mediante un algoritmo genético con 2.000 generaciones, 29 raíces aleatorias y una semilla. Esto se repite para cinco semillas principales diferentes, con el objetivo de ayudar al algoritmo a encontrar óptimos globales. Es de notar que la complejidad numérica no permite garantizar convergencia; más aún, en varias situaciones se encontraron parámetros bastante distintos que ofrecían valores similares para la función objetivo por maximizar.

Los resultados mostrados corresponden al máximo absoluto encontrado en cada regulación modelada, pero debe tomarse esto como una aproximación a la solución exacta. Siguiendo el esquema adoptado para el caso de un período, se corre el modelo para los siguientes cambios en la regulación:

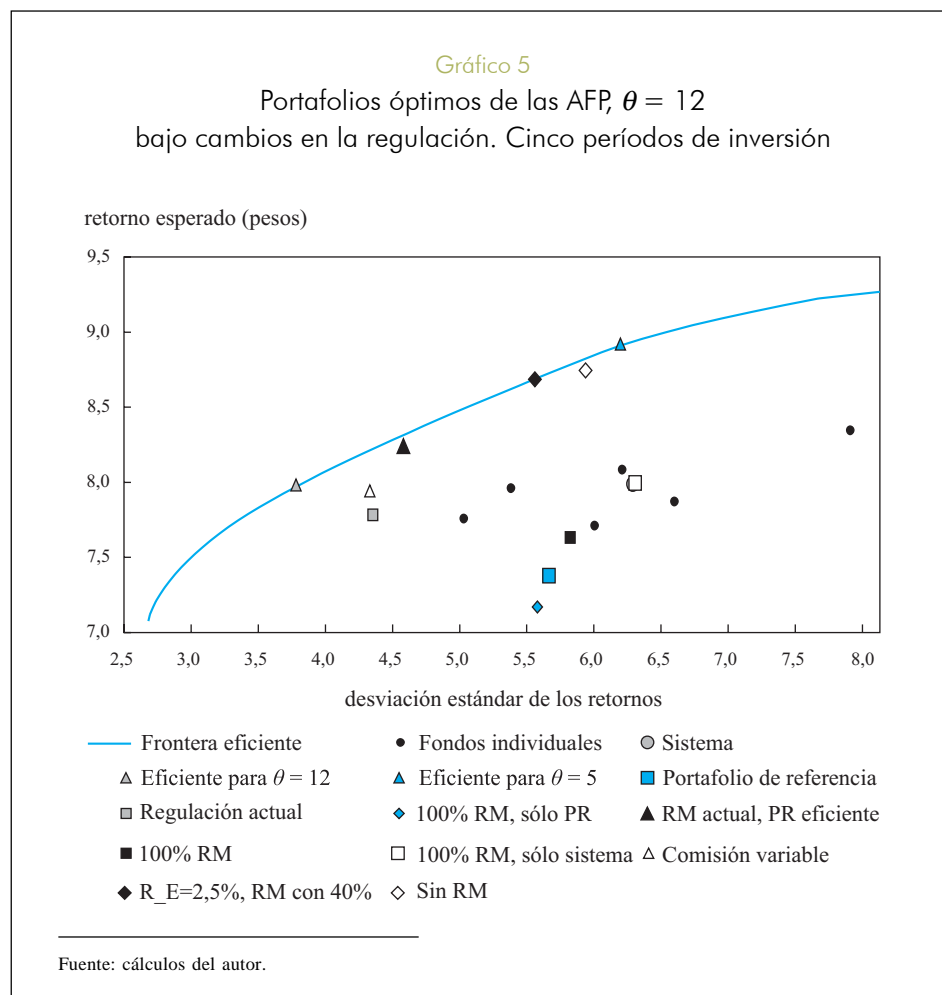
1. *Caso base*: regulación actual.
2. 100% *RM*, *solo PR*: la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times [\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR}]$, y todo lo demás permanece igual.
3. *RM actual*, *PR eficiente*: todo permanece igual, excepto que se usa un portafolio eficiente como portafolio de referencia para calcular de la rentabilidad mínima²⁶.
4. 100% *RM*: la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})]$, y todo lo demás permanece igual.
5. 100% *RM*, *Solo SIST*: la rentabilidad mínima se calcula con la fórmula $RM = 100\% \times R_S$, y todo lo demás permanece igual.
6. *Comisión variable*: se cambia el sistema actual de comisiones, y se reemplaza por uno en donde las AFP cobran como comisión el 15% de los rendimientos de las cuentas individuales, en caso de ser positivos, y cero si los rendimientos son negativos.

²⁶ Se usa un portafolio eficiente que está casi en la mitad entre los que escogerían inversionistas con aversión al riesgo $q = 5$ y $q = 12$.

7. *Sin RM*: se elimina la rentabilidad mínima.
8. $R_E=2,5\%$, *RM con 40%*: se exige que la AFP sea dueña de 2,5% del fondo mediante la reserva de estabilización, y se relaja la rentabilidad mínima para ser calculada mediante la fórmula

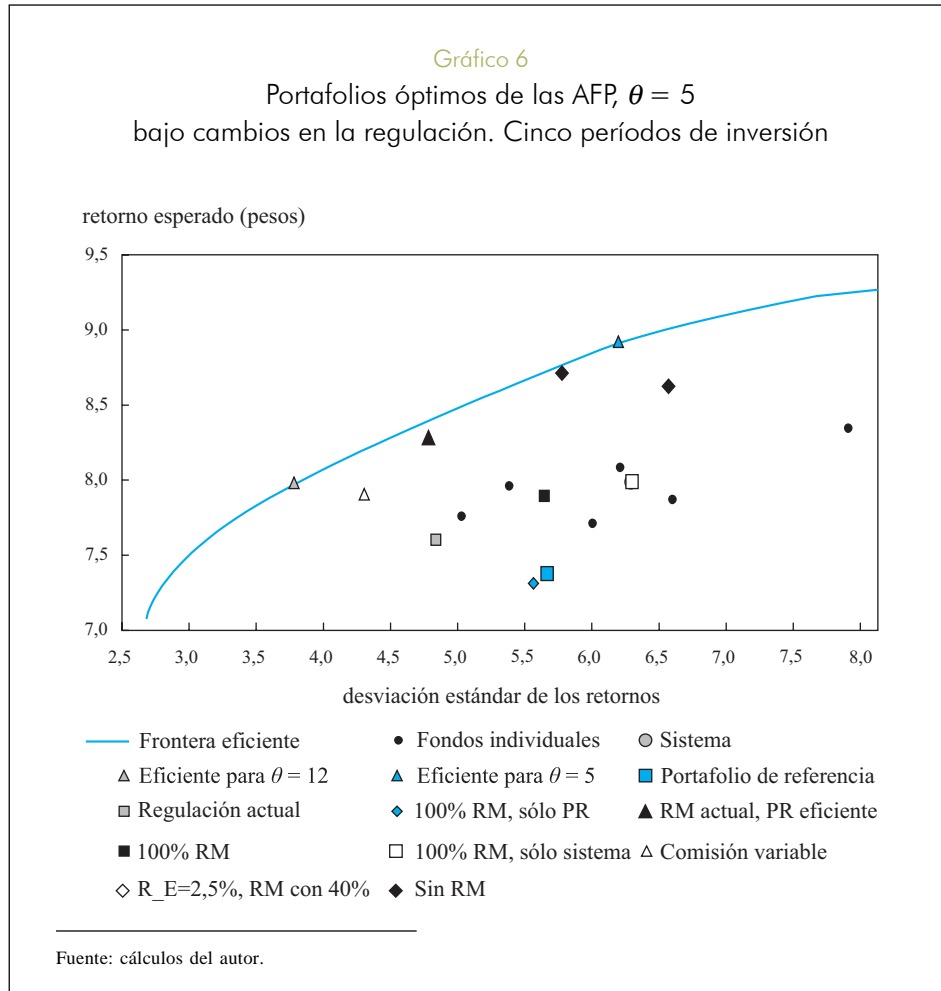
$$RM = 40\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})].$$

En el Gráfico 5 se observa que al excluir la restricción de rentabilidad mínima de la regulación traería como comportamiento óptimo de la AFP invertir en un portafolio eficiente. Asimismo, se pueden observar diferencias con respecto al caso de un período: por ejemplo, el modelo indica que bajo la regulación actual, el portafolio óptimo para la AFP no es uno eficiente, como sí ocurría antes. La explicación se encuentra en la naturaleza trianual de este cálculo. En el caso de un período se tomaron dos años anteriores fijos, en donde el fondo había superado fácilmente la rentabilidad mínima, dejando poco riesgo de quedar por debajo en el acumulado trianual después del año siguiente. En el caso actual, la rentabilidad mínima es más importante: hay más riesgo de violarla, dado que se mira cinco años adelante. Si se lleva la rentabilidad mínima a extremos, en donde se incrementa el mutlicador de 70% a 100% (cerca a donde se encontraba hasta comienzos del 2004; véase Anexo 1, sección I), se observan los siguientes comportamientos óptimos de la AFP: cuando se elimina el portafolio de referencia, lo óptimo es imitar el perfil de riesgo-retorno del sistema; mientras que cuando se elimina el sistema del cálculo, lo óptimo es acercarse al perfil del portafolio de referencia. En el caso en donde se promedia el sistema con el portafolio de referencia, lo óptimo es acercarse a un punto medio; es decir, este modelo evidencia que en el extremo la rentabilidad mínima incentiva a las AFP a imitar el portafolio de definición de ésta. Además de generar un efecto manada posiblemente indeseado, esto puede ocasionar (como parece verse en la práctica) equilibrios ineficientes por parte de los fondos, lo cual significa que las AFP se comportan racionalmente y optimizan sus utilidades alejándose de la frontera eficiente, acércandose al portafolio del sistema y al portafolio de referencia. Es razonable estudiar el efecto de cambiar el portafolio de referencia por uno eficiente, y en el Gráfico 5 se nota que el modelo sugiere que las AFP deberían acercarse a la frontera eficiente. Igualmente, un cambio en el esquema de comisiones que permita a las AFP cobrar una porción del rendimiento del fondo ayudaría a incrementar la eficiencia del portafolio óptimo de inversión, lo cual se logra con una disminución simultánea del riesgo, que se puede explicar considerando que una AFP no desea tomar riesgos en las comisiones cobradas, y desea tener estabilidad en estos cobros. Finalmente, una regulación con una restricción más alta en el monto por ser dejado en la reserva



de estabilización, combinada con una restricción de rentabilidad mínima más relajada, tiene como resultado óptimo para la AFP un portafolio eficiente; es decir, se corrobora el efecto intuitivamente positivo que debe tener un fuerte alineamiento entre los incentivos y riesgos tomados por la AFP y sus afiliados.

En el Gráfico 6 se muestra los resultados para una aversión al riesgo menor, los cuales son similares a los descritos anteriormente. Como es de esperarse, los portafolios óptimos desde distintas regulaciones tienden a moverse a puntos de mayor riesgo.



V. CONCLUSIONES

Modelar un fondo de pensiones incorporando su entorno de regulación y de mercado puede permitir analizar cuál debe ser el comportamiento óptimo en términos del portafolio de inversión del fondo; más aún, permite observar cambios en este comportamiento óptimo para cambios en la regulación de los fondos. Es importante anotar que los supuestos necesarios para poder definir tal modelo, junto con la falta de evidencia empírica que permita validar el modelo y con la complejidad numérica causada por la dimensionalidad de los portafolios (que causan

optimizaciones matemáticas de muy lenta o incierta convergencia), no permiten presentar conclusiones numéricas precisas; es decir, no se puede pretender determinar de manera exacta el comportamiento óptimo que debería tener una AFP. Sin embargo, se pueden observar tendencias y diferencias en los comportamientos óptimos determinados por el modelo para obtener señales de posibles consecuencias de la regulación en el comportamiento de los fondos.

En este estudio se presenta un modelo en donde se incluyen los puntos de la regulación relevantes para la determinación del portafolio de los fondos de pensiones. La evolución de algunas variables, tales como ciertos costos, cuya relación con otras variables no es exactamente establecida, se determina mediante regresiones lineales. Finalmente, se introduce en el modelo un agente que representa un fondo de pensiones pequeño, para poder suponer que sus acciones no afectan el comportamiento del sistema. Los datos iniciales de información de este fondo modelo, y los parámetros que permiten definir éste como un modelo dinámico, son basados en su totalidad en información disponible en la página electrónica de la Superintendencia Financiera.

Reiterando la imposibilidad de validar empíricamente los resultados obtenidos, y teniendo en cuenta la dificultad para obtener resultados irrefutables, dada la dimensionalidad del problema, se describen a continuación las conclusiones derivadas de este modelo:

- La regulación actual puede explicar las inversiones ineficientes de los fondos de pensiones. El modelo en general indica que el portafolio óptimo para una AFP tiene un perfil de retorno esperado similar a lo observado en los fondos de pensiones, pero un perfil de riesgo algo menor, el cual no llega a la frontera eficiente.
- Si a la regulación actual se le omitiera la restricción de la rentabilidad mínima, las AFP optimizarían su utilidad esperada invirtiendo en un portafolio eficiente.
- La definición de la rentabilidad mínima determina un atractor; mientras más estricto sea el factor multiplicador (en la actualidad, 70%), más se acerca el portafolio óptimo para la AFP al portafolio que define la rentabilidad mínima (en la actualidad, el promedio del portafolio del sistema y el portafolio de referencia definido por la Superintendencia Financiera) en términos del perfil de riesgo-retorno. Dado que este factor fue reducido en 2004 de 90% a

70%, es posible pensar que hasta ese momento el sistema fue atraído por el perfil del portafolio de referencia (claramente ineficiente) hacia un equilibrio ineficiente, y que la reducción hecha en 2004 puede ayudar a alejarlo nuevamente; Sin embargo, es razonable pensar que este alejamiento, si ocurre, tomará tiempo en materializarse.

- Para horizontes de inversión mayores, las AFP tienen más riesgo de violar la rentabilidad mínima, y por tanto ésta se vuelve más relevante. En el caso de un período, en donde se suponen dados dos años anteriores de buenas rentabilidades para el fondo estudiado, la rentabilidad mínima deja de ser relevante para el comportamiento de la AFP.
- Si el portafolio de referencia se define como un portafolio eficiente, mejoraría la eficiencia del fondo analizado, suponiendo que su administradora desea optimizar su utilidad esperada.
- Introducir un esquema de comisión variable que dependa del rendimiento del fondo mejoraría la eficiencia de los fondos, causando simultáneamente una disminución notable en el riesgo tomado por los portafolios.
- Alinear los incentivos de las AFP con los de sus afiliados mediante un incremento al porcentaje mínimo de la reserva de estabilización ayudaría fuertemente a mejorar la eficiencia de los fondos.

REFERENCIAS

1. Arango, L. E.; Melo, L. F., “Determinantes de la elección de administradora de pensiones: primeras estimaciones a partir de agregados”, Borradores de Economía, núm. 383, *Banco de la República*, marzo, 2006.
2. Ayala, U.; Acosta, O. L., “Políticas para promover una ampliación de la cobertura del sistema de pensiones en Colombia”, publicación de las Naciones Unidas, abril, 2002.
3. Circular Externa 007 de 1996 de la Superintendencia Bancaria.
4. Das, S. R.; Sundaram, R. K. “Fee Speech: Signaling, Risk-Sharing, and the Impact of Fee Structures on Investor Welfare”, *The Review of Financial Studies*, Winter, 2002.
5. Devesa-Carpio, J. E.; Vidal-Meliá, C., “The Reformed Pension Systems in Latin America”, *Social Protection*, Discussion Paper Series, núm. 0209, Banco Mundial, 2002.
6. Ley 100 de 1993. “Sistema de seguridad social integral”, diciembre, 1993.
7. Gómez, C.; Jara, D.; Pardo, A., “Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales obligatorios en Colombia”, *Ensayos sobre Política Económica*, diciembre, núm. 49, 2005.
8. Shah, H., “Towards Better Regulation of Private Pension Funds”, *Informe para el Banco Mundial*, abril, 1997.
9. Solís-Soberón, F. “The Regulation of Investments in Latin American Defined Contribution Public Pension Schemes”, *Informe para Consar*, noviembre, 1999.
10. Srinivas, P. S.; Whitehouse, E.; Yermo, J., “Regulating Private Pension Funds’ Structure, Performance and Investment: Cross-country Evidence”, *Social Protection Discussion Paper Series*, núm. 0113, Banco Mundial, 2000.

11. Suescún, R., “Regulación de los fondos privados de pensiones”, *Informe para el Ministerio de Hacienda de Colombia*, mayo, 2001.

ANEXO 1

I. EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD MÍNIMA

El artículo 101 de la Ley 100 de 1993 obliga a las AFP a garantizar un rendimiento mínimo a sus afiliados. Esta cota es determinada trimestralmente mediante una fórmula definida por la Superintendencia Financiera. A continuación se muestra la evolución histórica de esta fórmula.

1. En el Decreto 740 de 1994 se define la rentabilidad mínima como

$$RM = 90\% \times \alpha R_E + 97,5\% \times (1 - \alpha) R_{NE}, \text{ donde:}$$

- R_E es el retorno promedio, ponderado por nivel de capitalización de las veinte acciones más transadas, en el mercado accionario colombiano;
- R_{NE} es la tasa promedio de colocación de bonos recientemente emitidos por el Gobierno colombiano, el Banco de la República, entidades del Estado, algunas entidades comerciales, y CDT de establecimientos de crédito, ponderada por montos en circulación;
- α es el porcentaje del fondo invertido en renta variable.

Se debe notar que α variaba con cada AFP; por tanto, la rentabilidad mínima no era uniforme: existía la posibilidad de que para dos fondos, A y B, A tuviera un mejor rendimiento que B, pero A fallara en cumplir con la rentabilidad mínima, mientras que B cumpliera con ella. También se debe notar que R_{NE} no representa un retorno, sino un promedio de tasas de colocación. Finalmente, el resultado de la fórmula era difundida al final de cada año, tomando en cuenta los rendimientos desde el comienzo del año hasta dos semanas antes del fin del año.

2. Con el Decreto 1141 de 1995, la rentabilidad mínima se define más cercanamente al espíritu de la definición chilena:

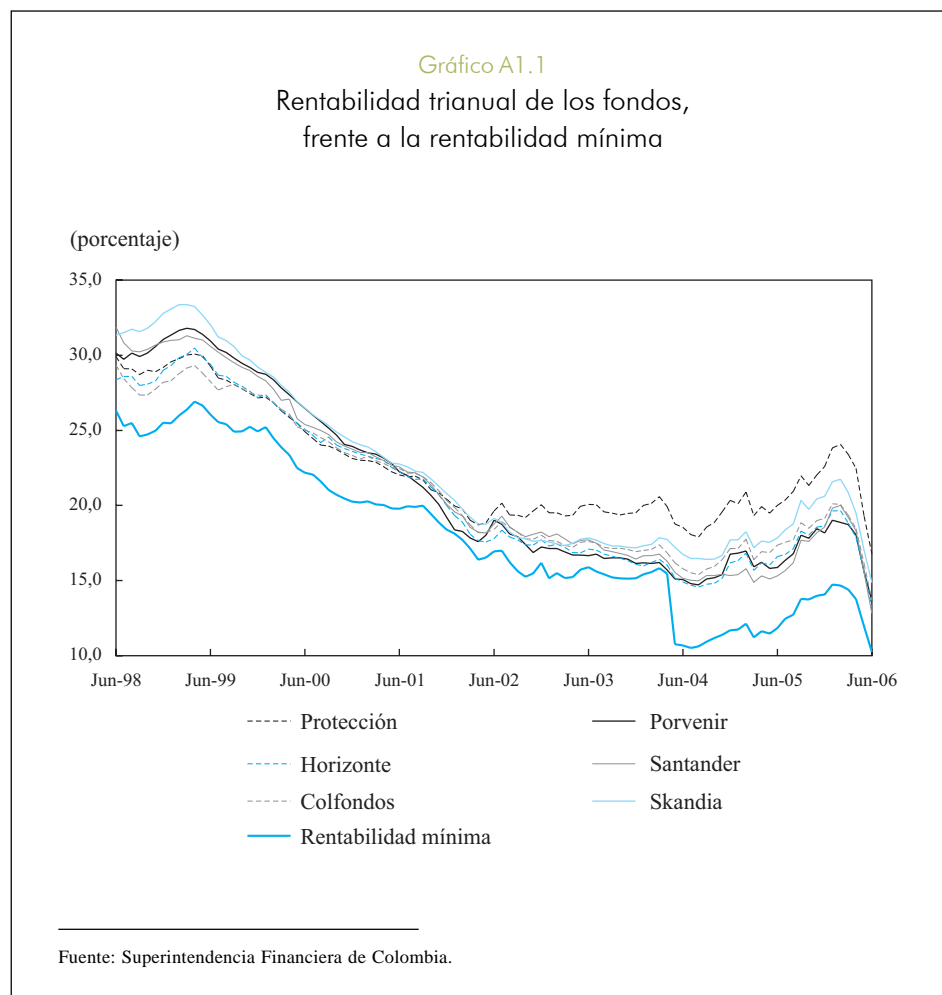
$$RM = \frac{1}{2} (90\% R_p + (90\% \times \alpha R_E + 95\% \times (1 - \alpha) R_{NE})), \text{ donde}$$

- R_p es el retorno promedio del sistema de los fondos de pensiones, ponderado por el tamaño de cada uno (sin que este porcentaje sobrepase el 20% del sistema);
 - R_E es el retorno promedio de las tres bolsas accionarias del país, ponderado por el volumen transado en cada una;
 - R_{NE} es el rendimiento de un portafolio de referencia compuesto por deuda gubernamental, CDT, y deuda corporativa;
 - a es el porcentaje del fondo invertido en renta variable. La verificación de esta rentabilidad mínima se estableció con frecuencia trimestral, sobre rendimientos bianuales.
3. El Decreto 806 de 1996 presentó solo dos cambios: se limitó α inferiormente con 5%. Este cambio se hizo con el fin de promover el desarrollo del mercado accionario colombiano. Otro cambio consistió en establecer las mediciones trimestrales sobre rendimientos *trianuales*.
4. El Decreto 1592 de 2004 redujo el multiplicador fraccionario de la fórmula (volviéndolo uniforme e igual a 70%), eliminó el piso de 5% a la exposición de los portafolios en renta variable, e introdujo una medición al porcentaje invertido en renta variable externa:

$$RM = 70\% \times \frac{1}{2} [R_S + (\alpha \times R_{RVL} + \beta \times R_{RVE} + (1 - \alpha - \beta) \times R_{PR})], \text{ donde}$$

- R_S es el retorno promedio del sistema de los fondos de pensiones, ponderado por el tamaño de los fondos (acotado superiormente por 20%);
- R_{RVL} es el retorno del índice accionario IGBC;
- R_{RVE} es el retorno (en pesos) del índice accionario S & P 500;
- R_{PR} es el retorno del portafolio de referencia, definido por la Superintendencia Financiera, y conformado en su mayoría por deuda pública interna, CDT y títulos comerciales;
- α es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en acciones locales, y
- β es el porcentaje del portafolio agregado de los fondos de pensiones invertido en renta variable externa.

En el Gráfico A1.1 se muestra la rentabilidad trianual de los fondos comparada con la rentabilidad mínima.



II. DATOS DE LOS RETORNOS

Las fuentes de retornos históricos de distintos tipos de activos se resumen en el Cuadro A1.1, cuyos datos abarcan el período entre enero de 2001 y enero de 2006. Para la construcción de la matriz de varianza-covarianza se usó la frecuencia semanal de retornos de los índices. Para el análisis de los retornos esperados se tomaron los bonos de los emisores, considerados con madurez cercana a un año de Bloomberg, excepto para el caso de deuda corporativa colombiana, cuyos datos se obtuvieron de la Bolsa de Valores de Colombia.

Cuadro A1.1
Fuentes de los retornos por tipo de activos

Familia de activos	Activo	Fuente
TCP (TES corto plazo)	Índice de TES de CP	AFP Porvenir
TCP (TES largo plazo)	Índice de TES de LP	AFP Porvenir
TUVR (TES UVR)	Índice de TES UVR	AFP Porvenir
BCC (bonos privados)	Índice de bonos IPC	AFP Porvenir
RVL (acciones Colombia)	Índice IGBC	B (IGBC <Index>)
YANK (deuda externa Colombia)	Índice EMBI Colombia	B (JPEGCO <Index>)
DGD (deuda desarrollados)	Índice deuda española Índice deuda japonesa Índice deuda británica Índice deuda alemana Índice deuda EE.UU.	LB (Global: Spain) LB (Global: Japan) LB (Global: UK) LB (Global: Germany) LB (U.S. Treasury)
DEGE (deuda externa emergentes)	Índice EMBI Bulgaria Índice EMBI Chile Índice EMBI Hungría Índice EMBI Malasia Índice EMBI México Índice EMBI Polonia Índice EMBI Rusia Índice EMBI Sur África Índice EMBI Tailandia	B (JPEGBG <Index>) B (JPEGCH <Index>) B (JPEGHU <Index>) B (JPEGMA <Index>) B (JPEGMX <Index>) B (JPEGPL <Index>) B (JPEGRUS <Index>) B (JPEGSAF <Index>) B (JPEGTH <Index>)
DIGE (deuda interna emergentes)	Índice EMBI R. Checa Índice EMBI Polonia Índice EMBI Sur África	B (JPMT CZ <Index>) B (JPENPDUL <Index>) B (JPMTSAF <Index>)
DCE (deuda corporativa externa)	Índice EE.UU. Índice Europa Índice Japón	LB (U.S. Corp. Inv. Grade) LB (European Corporate) LB (Japanese Corporate)
RVE (acciones externas)	Índice S&P EE.UU. Índice Europa Índice Asia Ex-Japón	B (ISPIX US <Index>) B (IEV US <Index>) B (MXAPJ <Index>)

B = Bloomberg, LB = Lehman Brothers.

En los cuadros A1.2 y A1.3 se muestran los retornos esperados, desviación estándar de los retornos y matriz de correlación de retornos usados en el modelo para las clases de activos definidas anteriormente¹.

III. ANÁLISIS DE DATOS DE LAS AFP EN COLOMBIA

A. Variables del modelo

A continuación se definen las variables de estado del modelo, entendiendo las cantidades monetarias en miles de millones de pesos colombianos.

- Retornos durante el período t , $t = 1, 2, \dots, T$:
 - $r_i(t)$: retorno del activo i .
 - $R_{PORT}(t)$: retorno del fondo de pensiones.

¹ La deuda emergente es menos volátil que la desarrollada; esto se explica con la volatilidad cambiaria: la deuda emergente se denomina casi en su totalidad en dólares, mientras que la desarrollada se denomina en dólares, euros y yenes; por su parte, siendo el dólar-peso bastante menos volátil que el euro-peso y el yen-peso, se explica esta aparente paradoja.

Cuadro A1.2
Media ($E[R]$) y desviación estándar (σ) modeladas
para los retornos de los activos
(porcentaje en pesos nominales)

	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
$E[R]$	6,24	6,79	5,82	7,89	13,69	6,77
σ	3,54	10,08	7,6	6,36	25,24	10,64
	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
$E[R]$	6,35	8,78	6,8	6,95	10,62	0
σ	10,8	8,53	13,9	8,92	16,83	7,16

Fuente: cálculos del autor.

- $R_{SIST}(t)$: retorno del promedio del sistema de fondos.
- $R_{PR}(t)$: retorno del portafolio de referencia.
- $R_{TESOR}(t)$: retorno del portafolio de tesorería.
- $R_1(t)$: retorno anual del fondo de pensiones durante los últimos tres períodos.
- $R_2(t)$: rentabilidad mínima calculada con datos del período t .

Cuadro A1.3

Matriz de correlación de retornos de los activos
(porcentaje)

	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
TCP	100	41	11	25	14	-22
TLP	41	100	17	25	12	-15
TUVR	11	17	100	7	-5	3
BCC	25	25	7	100	9	-13
RVL	14	12	-5	9	100	34
YANK	-22	-15	3	-13	34	100
DGD	-24	-19	-1	-18	48	82
DEGE	-15	-11	4	-2	35	77
DIGE	-24	-15	5	-18	46	87
DCE	5	6	2	11	27	2
RVE	76	53	12	32	17	-31
FWD	32	25	2	20	-37	-72
	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
TCP	-24	-15	-24	5	76	32
TLP	-19	-11	-15	6	53	25
TUVR	-1	4	5	2	12	2
BCC	-18	-2	-18	11	32	20
RVL	48	35	46	27	17	-37
YANK	82	77	87	2	-31	-72
DGD	100	59	93	17	-37	-89
DEGE	59	100	61	15	-19	-54
DIGE	93	61	100	15	-35	-83
DCE	17	15	15	100	0	-24
RVE	-37	-19	-35	0	100	44
FWD	-89	-54	-83	-24	44	100

Fuente: cálculos del autor.

- $R_{RM}(t)$: rentabilidad mínima vigente para el período t (es decir, calculada y agregada para los últimos tres años).
- Ingresos para el período $t, t = 1, 2, \dots, T$:
 - $I_{COM}(t)$: ingresos por comisiones.
 - $I_{RE}(t)$: valoración de la reserva de estabilización.
 - $I_{TESOR}(t)$: valoración del portafolio de tesorería.
- Costos para el período $t, t = 1, 2, \dots, T$:
 - $C_{PER}(t)$: costo de personal e infraestructura.
 - $C_{IMP}(t)$: egresos por pago de impuestos.
 - $C_{PUBL}(t)$: costo de publicidad y propaganda.
 - $C_{RM}(t)$: egresos por rentabilidad mínima.
 - $C_{OTR}(t)$: otros costos.
- Información del fondo para el período $t, t = 1, 2, \dots, T$:
 - $J_{AFIL}(t)$: número de afiliados al fondo.
 - $J_{APOR}(t)$: nuevos aportes al fondo de pensiones.
 - $J_{TAM}(t)$: tamaño del fondo.
 - $J_{PENS}(t)$: nuevos pensionados del fondo.
 - J_{EDAD} : edad promedio inicial de afiliados a la AFP.
 - $J_{RET}(t)$: retiros del fondo por nuevos pensionados.
 - $J_{SAL}(t)$: nivel promedio de salarios de los afiliados de la AFP.
- Información del sistema de fondos para el período $t, t = 1, 2, \dots, T$:
 - $J_{COST}(t)$: total de gastos en personal e infraestructura del sistema.
 - $J_{TAM SIST}(t)$: tamaño del sistema de fondos de pensiones.
 - $J_{AF SIST}(t)$: número de afiliados del sistema.
 - $J_{PEN SIST}(t)$: nuevos pensionados del sistema.
 - $J_{RET SIST}(t)$: retiros del sistema por nuevos pensionados.
 - $J_{SAL SIST}(t)$: nivel promedio de salarios de los afiliados al sistema.
- Variables contables para el período $t, t = 1, 2, \dots, T$:
 - K_{CAP} : capital inicial invertido por accionistas en la AFP.
 - $K_{RE}(t)$: tamaño de la reserva de estabilización.
 - $K_{PAT}(t)$: patrimonio de la AFP.
 - $K_{TESOR}(t)$: tamaño del portafolio de tesorería.
 - $K_{DIV}(t)$: dividendos repartidos en el período t .

- $K_{ING}(t)$: total ingresos de la AFP.
- $K_{COST}(t)$: total egresos de la AFP.
- Otras variables para el período $t, t=1, 2, \dots, T$:
 - $\eta(t)$: número total de *nuevos* afiliados en el sistema.
 - J_{RETRO} : edad de retiro; se usa sesenta años, simplificando así un promedio entre la edad de retiro para hombres y para mujeres.
 - $a_{PENS}(t)$: porcentaje de afiliados que se pensionan en el período.
 - $w_{DP}(t)$: proporción del fondo de pensiones invertido en deuda pública.

B. Fuente y cálculos

La página electrónica de la Superintendencia Financiera ofrece información financiera, contable y estadística de los fondos de pensiones. En particular, la siguiente fue la información usada en el presente trabajo:

1. Estados financieros de las AFP: hoja de balance y de pérdidas y ganancias (P y G) de las administradoras.
2. Estados financieros de los fondos de pensiones: hoja de balance y P y G de los fondos administrados.
3. Reporte de valor de los fondos: información de saldo, recaudos, rendimientos abonados, traslados, mesadas pensionales, y comisiones cobradas.
4. Reporte de afiliados de los fondos: información del número de afiliados, clasificación por salario y género, y datos de afiliados cotizantes, cesantes y pensionados.
5. Reporte del portafolio de inversión de los fondos.

La mayoría de estos reportes se resumen en el comunicado de prensa mensual de la Superintendencia Financiera.

Los valores para las variables usados en el modelo que son requeridos como condición inicial se muestran en el Cuadro A1.4.

C. Cambio en el número de afiliados de una AFP

Se realizó un estudio de panel sobre las seis AFP, en donde se usaron datos de mayo de 2002 a noviembre de 2005. Una regresión del cambio en el número de

Cuadro A1.4

Valores iniciales de variables usadas en el modelo
(cantidades monetarias en miles de millones de pesos)

C_{PER}	10,5	J_{TAM}	1.200
J_{COST}	190,0	$J_{TAM\ SIST}$	35.470
C_{IMP}	1,4	J_{PENS}	0
C_{PUBL}	0,15	$J_{PENS\ SIST}$	0
C_{OTR}	2,0	J_{RET}	0
C_{RM}	0,0000	$J_{RET\ SIST}$	0
J_{SAL}	0,0200	K_{ING}	18
$J_{SAL\ SIST}$	0,0096	K_{COST}	14
J_{AFIL}	50.000	K_{CAP}	45
$J_{AF\ SIST}$	6.315.000	$R_{PORT}(-1) (\%)$	19 ,6
$R_{PORT} (0) (\%)$	25,3	$R_{SIST}(-1) (\%)$	17 ,6
$R_{SIST} (0) (\%)$	26,0	$R_{PR}(-1) (\%)$	14 ,0
$R_{PR} (0) (\%)$	23,3		

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia y cálculos del autor.

afiliados sobre tres variables (rentabilidad trianual del fondo, costos en publicidad, y costos en personal e infraestructura) arrojó los resultados exhibidos en el Cuadro A1.5. Se nota que de las tres variables, sólo la de costos de personal e infraestructura es significativa.. La rentabilidad del fondo no fue significativa, y además presentó un coeficiente con signo invertido (así, los datos indican que retornos más bajos favorecen débilmente la entrada de nuevos afiliados al fondo).

Con estos resultados se repite la regresión usando sólo la variable significativa; asimismo, se refinan las variables: como variable dependiente se toma:

y = nuevos afiliados a la AFP

Como variable independiente se toma

$$x = \frac{\text{costo de la AFP en personal}}{\text{costo del sistema en personal}} \times \text{nuevos afiliados al sistema.}$$

Cuadro A1.5

Estudio panel para las AFP:
cambio en el número de afiliados
frente al retorno del fondo,
costos de publicidad y costos de personal
(datos: mayo 2002 - noviembre 2005)

<i>dif af</i>	Coefficiente	Error estándar	<i>z</i>	Prob. (%)
<i>retorno fondo</i>	-40510,8	30671,5	-1,32	18,7
<i>costos publd</i>	-807,5	2113,3	-0,38	70,2
<i>costos pers</i>	2626,5	417,9	6,28	0,0
<i>const</i>	-841,9	796,6	-1,06	29,1
Wald $\chi^2(3) = 80,18$				
Prob > chi2 = 0,0000				

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

Los resultados se muestran en el Cuadro A1.6. Se observa que esta variable explica aceptablemente el cambio de afiliados de la AFP; más aún, se puede aceptar un coeficiente de 1 y una constante de 0, que sería suficiente para asegurar que el total de afiliados nuevos al sistema efectivamente se reparten entre las AFP existentes.

D. Nuevos afiliados en el sistema

Con los datos del número total de afiliados al sistema de pensiones obligatorias disponibles de la página de la Superintendencia Financiera, se genera una serie de tiempo de su cambio con frecuencia mensual (DAf), en donde se usan datos desde octubre 2001 hasta septiembre 2005. Una regresión contra el tiempo (t , en meses), arroja los resultados mostrados en el Cuadro A1.7.

Se analiza esta regresión para respetar la frecuencia del modelo: si el cambio mensual en el número de afiliados para el mes t es $\Delta_m Af(t) = \alpha + \beta * t$, entonces el cambio para el año T es:

Cuadro A1.6

Estudio panel para las AFP: cambio en el número de afiliados vs. a la proporción en costos de personal incurridos por la AFP frente al sistema, ajustada por el total de nuevos afiliados en el sistema (datos: mayo 2002 - noviembre 2005)

<i>dif af</i>	Coefficiente	Error estándar	<i>t</i>	Prob. (%)
<i>x</i>	0,9203	0,08283	11,11	0,0
<i>const</i>	565,3	606,1	0,93	35,2
F(1,233) = 123,45				
Prob > F = 0,0000				

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

$$\begin{aligned} \Delta_{an} Af &= \sum_{i=12T-11}^{12T} \Delta_m Af(i) \\ &= 12 * \alpha + 144 * \beta * (T - 1) + 78 * \beta \\ &\approx 596000 + 66500 * T, \end{aligned}$$

usando los datos del Cuadro A1.7.

E. Costos de personal e infraestructura

En los cuadros A1.8 y A1.9 se muestran los resultados de regresiones lineales de costos en personal e infraestructura frente al tamaño del fondo para uno particular y para el sistema de fondos.

Por simplicidad y precisión, en el modelo se acomoda esta dependencia para modelar el cambio en el costo de personal con respecto al cambio en el tamaño del fondo.

F. Costos de publicidad y otros

En los cuadros A1.10 y A1.11 se muestran los resultados de estudios de panel para los seis fondos, proyectando los costos en publicidad y otros, respectivamente,

sobre los ingresos de la AFP, el número de afiliados del fondo, y el tamaño del fondo.

A pesar de que muchas constantes no son significativamente distintas de cero, el tamaño de su variación motivan a incluirlas, usando ecuaciones estocásticas para la evolución de C_{PUBL} y C_{OTR} .

Cuadro A1.7

Cambio en el número de afiliados del sistema frente al tiempo
(datos: octubre 2001 - septiembre 2005)

$difAf$	Coficiente	Error estándar	t	Prob. (%)
τ	461,5	62	7,45	0,00
$const$	52185	1690	30,90	0,00
$R^2 = 55\%$				

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

Cuadro A1.8

Costo de personal e infraestructura frente al tamaño del fondo,
para un sólo fondo
(datos: junio 2002 - septiembre 2005)

C_{PER}	Coficiente	Error estándar	t	Prob. (%)
J_{TAM}	0,000597	0,0000575	10,4	0,0
$CONST$	0,186	0,04	4.634	0,0
$R^2 = 74\%$				

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

Cuadro A1.9

Costo de personal e infraestructura frente al tamaño del fondo para el sistema
(datos: junio 2002 - septiembre 2005)

C_{PER}	Coefficiente	Error estándar	t	Prob. (%)
J_{TAM}	0,000381	0,0000158	24,1	0,0
$CONST$	4,31	0,353	12,22	0,0
$R^2 = 74\%$				

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

Cuadro A1.10

Estudio panel de costos de publicidad frente al tamaño del fondo, número de afiliados, e ingresos de la AFP
(datos: junio 2002 - septiembre 2005)

C_{PUBL}	Coefficiente	Error estándar	t	Prob. (%)
K_{ING}	0,00427	0,0095	0,45	65,3
J_{AFIL}	0,000000091	0,0000000386	2,36	1,8
J_{TAM}	0,00000483	0,0000149	0,32	74,6
$const$	-0,0051	0,126	-0,40	68,7

Wald chi^2 (3) = 90,3

Prob > chi^2 = 0

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

Cuadro A1.11

Estudio panel de otros costos frente al tamaño del fondo,
 número de afiliados, e ingresos de la AFP
 (datos: junio 2002 - septiembre 2005)

C_{OTR}	Coefficiente	Error estándar	t	Prob. (%)
K_{ING}	0,00116	0,00572	0,2	83,9
J_{AFIL}	0,000000531	0,000000154	3,44	0,1
J_{TAM}	0,000049	0,075	0,32	74,6
$const$	-0,0051	0,126	1,21	22,6

Wald χ^2 (3) = 109,3

Prob > χ^2 = 0

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos del autor.

IV. SOLUCIÓN PARA UN PERÍODO

Se usan las variables definidas anteriormente.

A. Un período, excluyendo la rentabilidad

Sea Q_0 el nivel de capital neto inicial:

$$Q_0 = K_{CAP} - \min(DIV(0) \times (K_{CAP} - RE \times J_{TAM}(0)), 0);$$

es decir, el capital inicial menos el dividendo que se reparte inmediatamente. Luego, $TIR = (\text{ingresos} - \text{egresos}) / Q_0$, y, según el modelo planteado, se tiene

$$\begin{aligned} \text{ingresos} &= I_{COM}(1) + I_{RE}(1) + I_{TESOR}(1) \\ &= I_{COM}(1) + (K_{RE}(0)w_{PORT} + (Q_0 - K_{RE}(0))w_{TESOR}) \cdot r(1), \end{aligned}$$

donde $K_{RE}(0) = \min(RE \times J_{TAM}(0), K_{CAP})$, e $I_{COM}(1)$ es conocida en $t = 0$. Asimismo, los egresos se representan con la ecuación

$$\text{egresos} = (C_{PER}(1) + C_{PUBL}(1) + C_{OTR}(1))(1 - \alpha_{IMP}) + \alpha_{IMP} \times \text{ingresos},$$

donde

$$\begin{aligned} C_{PER}(1) &= C_{PER}(0) + c_0(J_{APOR}(0) - J_{PENS}(0)J_{RET}(0) + J_{TAM}(0)w_{PORT} \cdot r(1)) \\ C_{PUBL}(1) &= (c_1K_{ING}(0) + c_2J_{AFIL}(0) + c_3J_{TAM}(0) + c_4) + (d_1K_{ING}(0)\varepsilon_1(1) \\ &\quad + d_2J_{AFIL}(0)\varepsilon_2(1) + c_3J_{TAM}(0)\varepsilon_3(1) + d_4\varepsilon_4(1)) \\ C_{OTR}(1) &= (e_1K_{ING}(0) + e_2J_{AFIL}(0) + e_3J_{TAM}(0) + e_4) + (f_1K_{ING}(0)\phi_1(1) \\ &\quad + f_2J_{AFIL}(0)\phi_2(1) + f_3J_{TAM}(0)\phi_3(1) + f_4\phi_4(1)) \end{aligned}$$

En las últimas dos expresiones las variables ε y ϕ son normales estándar independientes; así, reemplazando estas expresiones en la ecuación:

$$\begin{aligned} TIR &= \frac{1 - \alpha_{IMP}}{Q_0} (I_{COM}(1) + I_{RE}(1) + I_{TESOR}(1) \\ &\quad - C_{PER}(1) - C_{PUBL}(1) - C_{OTR}(1)), \end{aligned}$$

se puede simplificar la utilidad esperada como sigue, teniendo en cuenta que para una variable normal, $X \sim \mathfrak{N}(\eta, \sigma^2)$ se da $E[e^{wX}] = e^{\omega\eta + \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$.

$$\begin{aligned} (A1.8) \quad E[U(TIR)] &= -\exp\left\{\frac{\theta(1 - \alpha_{IMP})}{Q_0}(\gamma_1 - \Gamma w_1 \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta^2(1 - \alpha_{IMP})^2}{2Q_0^2}(\gamma_2 + \Gamma^2 w_1 \Sigma w_1^T)\right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -I_{COM}(1) + (c_1 + e_1)K_{ING}(0) + (c_2 + e_2)J_{AFIL}(0) + (c_3 + e_3)J_{TAM}(0) + (c_4 + e_4) \\ &\quad + C_{PER}(0) + c_0(J_{APOR}(0) - J_{PENS}(0)J_{RET}(0)) \\ \gamma_2 &= (d_1^2 + f_1^2)K_{ING}(0)^2 + (d_2^2 + f_2^2)J_{AFIL}(0)^2 + (d_3^2 + f_3^2)J_{TAM}(0)^2 \\ &\quad + (d_4^2 + f_4^2) \\ \Gamma &= Q_0 - c_0J_{TAM}(0) \\ \lambda &= \frac{K_{RE}(0) - c_0J_{TAM}}{\Gamma}, \quad w_1 = \lambda w_{PORT} + (1 - \lambda)w_{TESOR}. \end{aligned}$$

El problema para resolver es el de encontrar las variables de control que maximizan la utilidad esperada. Si se fijan valores para DIV y RE , entonces el problema es equivalente a resolver

$$(A1.9) \quad \max_{w_1} \left(\Theta w_1 \mu - \frac{1}{2} \Theta^2 w_1 \Sigma w_1^T \right)$$

donde $\Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP}) \frac{\Gamma}{Q_0}$. Dado que w_1 es un promedio de w_{TESOR} y w_{PORT} , ponderado con pesos positivos² que suman uno, debe satisfacer las mismas restricciones que están impuestas en estos portafolios. Más aún, la solución a (A1.9) se da en el portafolio óptimo para un agente con función de utilidad U , y con aversión al riesgo Θ . En particular, este portafolio, que se denomina w_{Θ}^* , está sobre la frontera eficiente. El objetivo de la AFP se maximiza escogiendo w_{PORT}^* y w_{TESOR}^* de tal manera que:

$$(A1.10) \quad \lambda w_{PORT}^* + (1 - \lambda) w_{TESOR}^* = w_{\Theta}^*.$$

En particular, esto puede lograrse escogiendo: $w_{PORT}^* = w_{TESOR}^* = w_{\Theta}^*$ ³.

El portafolio final depende del valor óptimo de Q (que depende de Q_0 , que a su vez depende de DIV y RE). Si se fija un portafolio eficiente w_1 , la expresión (A1.9) es cuadrática en Θ , y alcanza su máximo en $\Theta^* = \frac{w_1 \mu}{w_1 \Sigma w_1^T}$. Para los datos usados, el mínimo valor de Θ^* es 14,0 (se da en el portafolio eficiente de más riesgo). Dado que $\Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP}) \frac{\Gamma}{Q_0} < 8,5$ para los datos considerados en el modelo, (A1.9) es creciente en Θ para cada w_1 , en el rango permitido para Θ ; luego, la solución de la optimización se da en el valor máximo posible de Θ (que se denomina $\check{\Theta}$), y en el portafolio eficiente que corresponden a esta aversión al riesgo (es decir, el portafolio que escogería un inversionista con aversión al riesgo $\check{\Theta}$). Finalmente, el valor máximo de Θ se da cuando Q_0 adquiere su valor máximo, es decir, cuando $Q_0 = K_{CAP}$, lo cual se logra si no se reparten dividendos en el tiempo 0 ($DIV^* = 0$). El valor de RE se vuelve irrelevante ante esta solución (dado que los portafolios de tesorería y de inversión del fondo son iguales, RE no desempeña un papel importante en el análisis).

² $c_0 < 1\% \Rightarrow \lambda > 0$ (véase Apéndice C). $Q_0 \geq K_{RE}(0) \Rightarrow \lambda \leq 1$.

³ Puede haber otras soluciones, que darían la misma función objetivo. Se escoge esta por simplicidad.

En conclusión, ante la ausencia de rentabilidad mínima, la AFP maximiza su utilidad esperada usando $DIV = 0$ y escogiendo un portafolio de inversión eficiente, equivalente al portafolio óptimo para un inversionista con aversión al riesgo

$$(A1.11) \quad \Theta = \theta(1 - \alpha_{IMP}) \left(1 - \frac{c_o J_{TAM}(0)}{K_{CAP}} \right),$$

donde θ es la aversión al riesgo de la AFP.

B. Un período, incluyendo rentabilidad mínima

Al montaje anterior se suma el costo de la rentabilidad mínima. Por simplicidad de exposición se hace una aproximación de primer orden para el retorno compuesto, y usando la notación introducida anteriormente, se obtiene

$$\begin{aligned} C_{RM}(1) &= \max \left[0, F_0 \left((1 + R_{RM}(1))^3 - (1 + R_1(1))^3 \right) \right] \\ &\approx \max \left[0, F_0 (R_2(1) - R_{PORT}(1)) \right. \\ &\quad \left. + R_2(0) - R_{PORT}(0) + R_2(-1) - R_{PORT}(-1) \right] \\ &= \max \left[0, F_0 (\alpha_R \times (\alpha_P R_{SIST}(1) + (1 - \alpha_P) R_{PR}(1)) \right. \\ &\quad \left. - R_{PORT}(1) + K) \right], \end{aligned}$$

donde F_0 es el tamaño del fondo dos períodos atrás, y K resume el exceso de la rentabilidad mínima en los últimos dos períodos sobre la rentabilidad del fondo. Al usar las variables definidas en el apéndice III.A, se desarrolla

$$\begin{aligned} E[U(TIR)] &= -\exp \left\{ \frac{\theta(1 - \alpha_{IMP})}{Q_0} \gamma_1 + \frac{\theta^2(1 - \alpha_{IMP})^2}{2Q_0^2} \gamma_2 \right\} * \\ &E \left[\exp \left(\frac{-\theta(1 - \alpha_{IMP})}{Q_0} (\Gamma w_1 r(1) - F_0 \max(0, K + w_2 r(1))) \right) \right], \end{aligned}$$

donde $w_2 = \alpha_R \alpha_P w_{SIST} + \alpha_R (1 - \alpha_P) w_{PR} - w_{PORT}$, y $r(1)$ es el vector de retornos de los activos. Para varias dimensiones de r , la solución analítica se ve sacrificada por expresiones que involucran integrales de la distribución normal acumulada; por esto, el valor de w_{PORT} que logra este máximo se encuentra de manera numérica.

V. *RESULTADOS*

Se exhiben cuatro cuadros a continuación (A1.12 a A1.15). Cada uno corresponde a un horizonte específico ($T = 1$ o $T = 5$) y a una aversión al riesgo específica ($\theta = 12$ o $\theta = 5$). En cada cuadro se muestran las variables de control óptimas para el fondo de pensiones analizado, para distintas especificaciones de la regulación: seis para $T = 1$ y siete para $T = 5$. Para $T = 5$ se adiciona el caso en donde no hay rentabilidad mínima, el cual es explícitamente resuelto en el apéndice IV A para el caso $T = 1$. Las variables de control son catorce: las primeras doce son los pesos de los activos usados (véase la III.A), y las últimas dos son los dividendos repartidos en cada tiempo, y la cantidad de patrimonio por dejar en la reserva de estabilización. Todas son presentadas en términos porcentuales. Se incluye en cada cuadro el retorno esperado y la desviación estándar del retorno de cada portafolio; asimismo, se incluye el portafolio del sistema de los fondos a enero de 2006, con el fin de facilitar la comparación.

Cuadro A1.12
Resultados del modelo $T = 1, \theta = 12$
(porcentaje)

$T = 1, \theta = 12$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
Caso base	30,3	0,6	0,0	29,4	17,8	1,9
100% RM, sólo PR	21,9	8,8	9,8	30,0	10,0	1,2
70% RM, PR eficiente	30,3	3,4	0,0	30,0	14,9	1,4
100% RM	16,2	16,1	9,9	30,0	10,0	0,9
100% RM, sólo sist.	5,7	17,4	17,6	23,9	14,1	6,7
Comisión variable	38,2	0,7	6,1	30,0	4,1	1,1
R _E = 2,5%, RM con 40%	30,2	0,3	0,0	29,9	17,8	1,8
Portafolio sistema	4,9	21,7	17,2	21,8	14,2	6,9

$T = 1, \theta = 12$	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
Caso base	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
100% RM, sólo PR	0,0	16,4	0,0	0,0	2,0	14,4
70% RM, PR eficiente	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
100% RM	0,5	12,9	0,0	0,0	3,7	6,2
100% RM, sólo sist.	0,0	0,8	0,6	8,9	4,3	13,3
Comisión variable	0,0	14,0	0,0	0,1	5,8	1,8
R _E = 2,5%, RM con 40%	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
Portafolio sistema	0,0	0,4	0,0	8,9	3,9	13,4

$T = 1, \theta = 12$	Div	RE	E[R]	Vol
Caso base	0,2	8,7	8,68	5,57
100% RM, sólo PR	5,6	6,7	8,00	4,49
70% RM, PR eficiente	13,3	4,6	8,49	5,08
100% RM	33,9	20,0	8,02	4,82
100% RM, sólo sist.	19,9	24,7	8,02	6,05
Comisión variable	1,3	1,1	7,63	3,38
R _E = 2,5%, RM con 40%	0,8	1,1	8,69	5,56
Portafolio sistema			7,99	6,29

Fuente: cálculos del autor.

Cuadro A1.13
Resultados del modelo $T = 1, \theta = 5$
(porcentaje)

$T = 1, \theta = 5$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
Caso base	30,3	0,0	0,0	30,0	17,8	1,9
100% RM, sólo PR	17,4	11,0	9,7	29,7	10,9	1,2
70% RM, PR eficiente	30,3	0,5	0,0	30,0	17,8	1,4
100% RM	0,2	16,5	15,0	27,6	14,9	6,7
100% RM, sólo sist.	4,9	21,7	17,2	21,9	14,2	6,9
Comisión variable	38,8	0,0	0,0	30,0	10,0	1,2
R _E = 2,5%, RM con 40%	16,0	14,4	0,0	30,0	19,1	0,5
Portafolio sistema	4,9	21,7	17,2	21,8	14,2	6,9

$T = 1, \theta = 5$	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
Caso base	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	3,9
100% RM, sólo PR	0,0	16,4	0,0	0,0	3,6	12,3
70% RM, PR eficiente	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	9,3
100% RM	0,0	8,5	0,0	6,1	4,6	14,2
100% RM, sólo sist.	0,0	0,4	0,0	8,9	3,9	13,4
Comisión variable	0,0	16,4	0,0	0,0	3,6	4,2
R _E = 2,5%, RM con 40%	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
Portafolio sistema	0,	0,4	0,0	8,9	3,9	13,4

$T = 1, \theta = 5$	Div	RE	E[R]	Vol
Caso base	19,8	8,7	8,69	5,56
100% RM, sólo PR	9,5	98,1	8,15	4,73
70% RM, PR eficiente	20,0	37,6	8,69	5,60
100% RM	4,2	30,8	8,33	5,96
100% RM, sólo sist.	22,2	1,5	7,99	6,30
Comisión variable	1,2	1,1	8,06	3,98
R _E = 2,5%, RM con 40%	2,6	1,1	8,86	6,27
Portafolio sistema			7,99	6,29

Fuente: cálculos del autor.

Cuadro A1.14
Resultados del modelo $T = 5, \theta = 12$
(porcentaje)

$T = 5, \theta = 12$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
Caso base	25,0	5,1	16,6	26,2	8,8	1,5
100% RM, sólo PR	5,2	10,7	43,8	26,0	7,1	0,0
70% RM, PR eficiente	30,3	6,8	0,0	30,0	11,2	1,9
100% RM	7,4	16,2	31,0	25,7	10,6	2,6
100% RM, sólo sist.	4,7	21,8	17,2	21,9	14,3	6,9
Comisión variable	23,4	5,0	11,6	30,0	8,1	1,9
Sin RM	20,3	10,7	0,0	30,0	18,0	1,8
R _E = 2,5%, RM con 40%	30,3	0,0	0,0	30,0	17,8	1,9
Portafolio sistema	4,9	21,7	17,2	21,8	14,2	6,9

$T = 5, \theta = 12$	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
Caso base	0,0	12,8	0,0	0,2	3,8	12,8
100% RM, sólo PR	5,0	0,0	0,0	0,0	2,2	6,6
70% RM, PR eficiente	0,0	13,0	0,0	0,0	6,7	7,9
100% RM	0,0	3,2	0,5	0,0	2,8	4,6
100% RM, sólo sist.	0,0	0,4	0,0	8,9	4,0	13,4
Comisión variable	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	21,0
Sin RM	0,0	13,3	0,0	0,0	6,0	2,0
R _E = 2,5%, RM con 40%	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
Portafolio sistema	0,0	0,4	0,0	8,9	3,9	13,4

$T = 5, \theta = 12$	Div	RE	E[R]	Vol
Caso base	68,2	1,2	7,78	4,36
100% RM, sólo PR	19,3	1,0	7,17	5,58
70% RM, PR eficiente	72,6	1,3	8,24	4,58
100% RM	21,2	1,1	7,63	5,82
100% RM, sólo sist.	16,9	1,0	8,00	6,31
Comisión variable	15,3	1,1	7,94	4,33
Sin RM	81,8	1,6	8,75	5,94
R _E = 2,5%, RM con 40%	4,8	4,4	8,69	5,56
Portafolio sistema			7,99	6,29

Fuente: cálculos del autor.

Cuadro A1.15
Resultados del modelo $T = 5, \theta = 5$
(porcentaje)

$T = 5, \theta = 5$	TCP	TLP	TUVR	BCC	RVL	YANK
Caso base	15,9	11,7	25,2	27,1	8,5	1,2
100% RM, sólo PR	6,8	9,3	43,4	27,0	7,6	0,0
70% RM, PR eficiente	25,9	12,0	0,0	28,3	11,8	1,9
100% RM	3,2	16,0	28,5	24,3	10,7	0,8
100% RM, sólo sist.	4,9	21,7	17,2	21,9	14,2	6,9
Comisión variable	30,2	2,1	11,1	27,2	10,0	1,1
Sin RM	23,2	8,1	0	29,0	17,7	1,9
R _E = 2,5%, RM con 40%	4,9	11,9	10,1	30,0	19,9	3,5
Portafolio sistema	4,9	21,7	17,2	21,8	14,2	6,9

$T = 5, \theta = 5$	DGD	DEGE	DIGE	DCE	RVE	FWD
Caso base	0,0	7,8	0,0	0,0	2,8	0,0
100% RM, sólo PR	0,0	3,7	0,0	0,0	2,2	4,7
70% RM, PR eficiente	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
100% RM	0,0	12,1	0,0	0,4	4,0	16,2
100% RM, sólo sist.	0,0	0,4	0,0	8,9	3,9	13,4
Comisión variable	0,0	13,1	0,0	1,5	3,6	15,8
Sin RM	0,0	14,0	0,0	0,0	6,0	1,9
R _E = 2,5%, RM con 40%	1,8	5,0	0,0	9,1	3,9	13,3
Portafolio sistema	0,0	0,4	0,0	8,9	3,9	13,4

$T = 5, \theta = 5$	Div	RE	E[R]	Vol
Caso base	67,9	1,1	7,6	4,84
100% RM, sólo PR	19,5	1,1	7,31	5,56
70% RM, PR eficiente	78,9	1,5	8,28	4,78
100% RM	21,8	1,1	7,89	5,65
100% RM, sólo sist.	22,2	1,5	7,99	6,30
Comisión variable	7,7	46,7	7,91	4,30
Sin RM	78,8	1,5	8,71	5,78
R _E = 2,5%, RM con 40%	2,7	2,5	8,62	6,57
Portafolio sistema			7,99	6,29

Fuente: cálculos del autor.