



**BANCO DE LA REPÚBLICA**

**SUBGERENCIA DE ESTUDIOS ECONÓMICOS**

## **Modelos Estructurales de Inflación en Colombia: Estimación a través de Mínimos Cuadrados Flexibles**

**Luis Fernando Melo V.  
Martha Misas A.\***

### **Resumen**

En este documento se presenta evidencia de cambios estructurales, a finales de la década de los noventa, en las relaciones económicas planteadas en los modelos uniecuacionales de inflación en Colombia. Hecho que afecta la inferencia y los pronósticos obtenidos a través de uso de técnicas clásicas de estimación. La metodología de estimación de mínimos cuadrados flexibles (Kalaba y Tesfatsion 1989, 1990), propuesta en esta investigación, permite incorporar tales cambios superando los problemas asociados a las metodologías tradicionales. Los pronósticos obtenidos a partir de esta metodología son superiores, en sentido de menor error mínimo cuadrático, a aquellos obtenidos a través de mínimos cuadrados ordinarios.

---

\* Los errores y omisiones son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva. Nuestro reconocimiento especial a Rocío Betancourt quien participó activamente en la primera etapa de esta investigación.

## 1. Introducción

Durante la década de los 90, un gran número de países alcanzaron una inflación baja y estable. En parte, este comportamiento es el reflejo de brechas de producto amplias y negativas en la primera parte de la década y “*shocks*” de oferta favorables hacia el final de ésta<sup>1</sup>. En general, la inflación actual se sitúa por debajo de las tasas de inflación pronosticadas por los modelos basados en datos históricos. Esto lleva a pensar en la posible existencia de un cambio estructural en el proceso subyacente generador de la inflación.

Alcanzar una inflación baja y estable también ha sido uno de los propósitos de la economía colombiana durante los últimos años. La inflación en Colombia se caracteriza por presentar diferentes niveles y variabilidades a través de su historia<sup>2</sup>. Así, durante 1988 el nivel de inflación promedio se sitúa en 28.44%, en tanto que, a partir de junio de 1999 se llega a un dígito y se reporta en el año 2002 el nivel observado más bajo de los últimos cuarenta años, 6.27%. Al igual que en el contexto internacional, cabe preguntarse si tal evolución refleja una serie de *shocks* transitorios favorables a los precios o un cambio permanente en el proceso de la inflación colombiana.

En general los modelos macroeconómicos son claramente vulnerables a cambios estructurales. Primero, los parámetros pueden cambiar a través del tiempo e introducir errores en la relación histórica estimada. Segundo, como lo sugieren Basdevant y Hargreaves (2003), los modelos son generalmente basados en un conjunto limitado de relaciones causales, las cuales pueden ser relevantes en un período de la historia e irrelevantes en otro. Dado que la inferencia estadística descansa sobre la estabilidad de las relaciones causales, el reconocimiento de inestabilidad conlleva a la búsqueda de nuevas técnicas de estimación que consideren dichos cambios.

Los cambios de régimen en la inflación colombiana han sido estudiados a través de modelos no lineales, donde tales cambios son considerados de manera directa por Melo y Misas (1998), Arango y González (1998) y Jalil y Melo (2000), entre otros; y de manera indirecta por Misas et al. (2002). Dichos cambios de régimen pueden ser indicio

---

<sup>1</sup> Véase, Bank for International Settlements, Papers No. 3, (2001).

<sup>2</sup> Véanse, Melo y Misas (1998).

de cambios estructurales, los cuales sugieren la búsqueda de metodologías más apropiadas para su estimación que la de mínimos cuadrados ordinarios, que supone invarianza de los parámetros a través del tiempo.

Este trabajo revisa la existencia de cambios estructurales en los modelos tradicionales de inflación en Colombia y propone utilizar un método de estimación de parámetros cambiantes a través del tiempo, mínimos cuadrados flexibles, MCF, que considera la inestabilidad estructural y permite minimizar los errores asociados al pronóstico, donde éste puede ser pensado como la etapa final de la metodología econométrica<sup>3</sup>. La no consideración de cambios estructurales podría producir gran incertidumbre en el pronóstico<sup>4</sup>.

Como lo plantean Clements y Hendry (1999), la teoría de pronóstico económico es bien fundamentada bajo el supuesto de que el modelo econométrico coincide con el mecanismo generador de datos en un mundo estable. Sin embargo, si la economía está sujeta a cambios estructurales implica por ende cambios en el mecanismo que va a ser pronosticado y por consiguiente pronósticos inciertos. Así, el objetivo central de esta investigación es mejorar los pronósticos de los modelos econométricos de la inflación en Colombia sin entrar a determinar las causas del cambio estructural.

El documento se organiza en cuatro secciones principales incluida esta introducción. En la segunda sección se presentan diferentes pruebas de diagnóstico sobre presencia de cambio estructural. La sección tres consigna la metodología de mínimos cuadrados flexibles. En la cuarta sección se muestran los resultados obtenidos sobre cambio estructural, al aplicar las pruebas de diagnóstico en los modelos

---

<sup>3</sup> Bajo los supuestos clásicos de regresión, el método de mínimos cuadrados ordinarios, de estimación de los coeficientes, satisface las propiedades deseables en muestras finitas, como también, en un contexto asintótico. La violación de una o más de las condiciones ideales en una aplicación empírica puede afectar las propiedades del estimador y por consiguiente causar errores en la predicción.

<sup>4</sup> Como lo expresa Laurence H. Meyer, Governor of The Federal Reserve Board of San Francisco, (2000): *“Structural changes of uncertain magnitude and timing have increased the difficulty in forecasting, undermined confidence in our understanding of the structure of the economy, and increased the risk of measurement error with respect to key variables”*

uniecuaionales de inflación en Colombia, para el período comprendido entre el primer trimestre de 1982 y el primer trimestre de 2003. En la quinta sección se evalúan los pronósticos fuera de muestra de los diferentes modelos de inflación al considerar la metodología de mínimos cuadrados flexibles y se comparan con los obtenidos a través de mínimos cuadrados ordinarios. Finalmente, en la última sección se concluye.

## **2. Pruebas sobre detección de cambio estructural**

La validez de los resultados que se desprenden del análisis de un modelo econométrico, fundamentado por supuesto en la teoría económica, depende primordialmente del cumplimiento de los supuestos sobre el término de perturbación. En el contexto de modelos de regresión con series de tiempo, y en especial en economías poco estables, aparece el problema de estabilidad de los parámetros del modelo, la cual es necesaria para realizar pronósticos e inferencias adecuadas.

Las pruebas más comunes y sencillas para verificar si existe o no tal inestabilidad son las pruebas de Chow y CUSUM. La prueba de Chow (Chow, 1960) plantea como hipótesis nula la estabilidad en los parámetros mientras que bajo la alterna especifica un cambio único en los parámetros, en un momento dado del tiempo. Aunque esta prueba se puede calcular mediante técnicas muy simples, requiere que el punto de quiebre especificado en la hipótesis alterna sea escogido de forma independiente con respecto a los datos, lo cual no se cumple cuando este punto es seleccionado con base en eventos históricos o después de inspección de las graficas de las series de tiempo bajo análisis<sup>5</sup>.

En este mismo contexto, otras pruebas muy utilizadas son CUSUM y CUSUM cuadrática, propuestas por Brown *et al.* (1975). Kramer, Ploberger y Alt. (1988) y Hansen (1992) señalan que la prueba CUSUM detecta esencialmente inestabilidad en el término del intercepto del modelo considerado, mientras que la prueba de CUSUM cuadrática puede ser vista como una prueba para detectar inestabilidad en la varianza del error del modelo. Un análisis de la potencia de estas pruebas es desarrollado en Hansen (1991).

---

<sup>5</sup> Para solucionar este problema Quandt (1960) propone calcular esta estadística sobre un conjunto de periodos posibles y tomar su máximo valor. Sin embargo, este autor no especifica la distribución estadística que se debe utilizar. Este problema es resuelto por Andrews (1993), Chu (1989) y Hansen (1990), entre otros.

En el presente trabajo se sigue el enfoque de Zeileis *et al.*<sup>6</sup> (2003) que, desde el punto de vista estadístico, sugiere que las pruebas para detectar cambios estructurales pueden ser divididas en dos clases, las pruebas tipo F y las pruebas de fluctuación. Las pruebas tipo F están diseñadas para detectar si existe un cambio estructural ocurrido en un periodo de tiempo específico, como por ejemplo, la prueba de Chow. Con el propósito de superar los problemas ya mencionados sobre este tipo de pruebas, Zeileis *et al.* las implementan utilizando técnicas propuestas por Andrews (1993) y Andrews y Ploberger (1994). Las pruebas de fluctuación, en términos generales, no suponen un patrón para el cambio estructural. Estas pruebas están basadas en técnicas que son diseñadas para mostrar posibles desviaciones de estabilidad a través de análisis gráficos. Un ejemplo de este tipo de técnicas lo constituye la prueba CUSUM y CUSUM cuadrática. Para evitar las críticas de Hansen (1992) y Kramer, Ploberger y Alt. (1988), Zeileis *et al.* presentan e implementan otras pruebas de fluctuación además de las pruebas CUSUM.

La idea general de los procedimientos sugeridos por Zeileis *et al.* se centra en derivar procesos que capturen las fluctuaciones en las estimaciones o en los residuales de un modelo de regresión y rechacen la hipótesis de estabilidad cuando existan grandes fluctuaciones en dichos procesos. Teniendo en cuenta este objetivo se considera el siguiente modelo de regresión lineal:

$$y_i = x_i' \beta_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \quad (1)$$

donde el subíndice  $i$  representa el periodo de tiempo,  $y_i$  es la variable dependiente observada,  $x_i = (1, x_{i2}, \dots, x_{ik})'$  es un vector  $k \times 1$  de regresores incluyendo el intercepto,  $\beta_i$  es el vector  $k \times 1$  de los coeficientes de regresión y  $u_i \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$ .

En el periodo de tiempo  $i = 1, 2, \dots, n$ , denominado periodo histórico, se supone que los coeficientes del modelo de regresión son constantes, es decir,  $\beta_i \equiv \beta_0, i = 1, \dots, n$ .

---

<sup>6</sup> Estos autores realizan una recopilación de varias pruebas sobre cambio estructural en un contexto de modelos de regresión lineal y las implementan en un módulo computacional escrito en lenguaje R, el cual es de acceso público. En <http://www.R-project.org/> se encuentra información sobre este lenguaje y en <http://cran.R-project.org/> sobre el módulo de cambios estructurales, el cual es denominado *strucchange*.

Por lo tanto la prueba de cambio estructural que nos interesa tiene la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \beta_i = \beta_0 \quad (i > n)$$

en tanto que, la hipótesis alterna indica que el vector de coeficientes  $\beta_i$  cambia en algún periodo de tiempo posterior a  $n$ .

En las siguientes dos secciones se explican con cierto detalle las principales pruebas empleadas en el artículo de Zeileis *et al.* Los valores críticos y las distribuciones de las estadísticas asociados a estas pruebas pueden ser consultadas en el artículo original.

## 2.1 Pruebas de fluctuación generalizadas

### 2.1.1. Procesos basados en residuales

En esta sección se consideran los procesos CUSUM y MOSUM, los cuales están basados en términos de sumas de residuales. La idea central de estos procedimientos se puede sintetizar en dos pasos. En el primero, se estiman los coeficientes del modelo de regresión para el periodo histórico y en el segundo, basados en estas estimaciones, se calculan los residuales de las observaciones en el período de monitoreo. De tal forma que, si existe un cambio estructural en el período de monitoreo, los residuales deberían desviarse sistemáticamente de su media cero.

Los procesos CUSUM son calculados como la suma acumulada de los residuales estandarizados recursivos (Recursive CUSUM):

$$W_n(s) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{\eta}} \sum_{i=k+1}^{k+\lfloor \eta s \rfloor} \hat{\alpha}_i; \quad 0 \leq s \leq 1$$

donde  $\eta = n - k$  es el número de residuales recursivos,  $\lfloor \eta s \rfloor$  es la parte entera de  $\eta s$ ,

$$\tilde{u}_i = \frac{y_i - x_i' \hat{\beta}^{(0,i-1)}}{\sqrt{1 + x_i' \left( X^{(0,i-1)'} X^{(0,i-1)} \right)^{-1} x_i}}, \quad \hat{\beta}^{(i,j)} \text{ es el estimador OLS de los coeficientes de}$$

regresión basados en las observaciones  $i+1, \dots, i+j$ ,  $X^{(i,j)}$  es la matriz de regresores basada en las observaciones  $i+1, \dots, i+j$  y  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n (\tilde{u}_i - \bar{\tilde{u}})^2$ .

Si existe un cambio estructural en el periodo  $t_0$ , los residuales recursivos tendrían media cero hasta este punto y por lo tanto, este proceso debería ser cercano a cero sólo hasta  $t_0$ .

Ploberger y Kramer (1992) también sugieren una prueba similar de cambios estructurales con base en la suma de residuales obtenida a través del método de mínimos cuadrados ordinarios (OLS). De tal forma que, el proceso de fluctuación OLS-CUSUM se puede definir como:

$$W_n^0(s) = \frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} \hat{u}_i; \quad 0 \leq s \leq 1$$

donde  $\hat{u}_i = y_i - x_i' \hat{\beta}^{(0,n)}$  y  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$ . En este caso, bajo la hipótesis alterna de existencia de cambio estructural, el proceso debería mostrar un pico alrededor del punto donde se presenta el cambio.

La detección de cambios estructurales también puede ser llevada a cabo a través de sumas móviles de residuales en lugar de sumas acumulativas. Así, el proceso recursivo MOSUM (Recursive MOSUM) puede representarse de la siguiente forma:

$$M_n(s|h) = \frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{\eta}} \sum_{i=k+\lfloor N_\eta s \rfloor+1}^{k+\lfloor N_\eta s \rfloor+\lfloor \eta h \rfloor} \tilde{u}_i; \quad 0 \leq s \leq 1-h$$

donde  $N_\eta = (\eta - \lfloor \eta h \rfloor) / (1-h)$ . De manera similar al proceso OLS-CUSUM, el proceso MOSUM basado en OLS tiene la siguiente definición:

$$M_n^0(s|h) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor N_n s \rfloor + 1}^{\lfloor N_n s \rfloor + \lfloor nh \rfloor} \hat{u}_i; \quad 0 \leq s \leq 1-h$$

donde  $N_n = (n - \lfloor nh \rfloor) / (1-h)$ . Así, frente a un único cambio estructural, las estadísticas MOSUM deberían mostrar un cambio de nivel alrededor del período de tiempo donde se presenta el cambio.

### 2.1.2 Procesos basados en estimación

En este esquema de análisis, el proceso de fluctuación, en lugar de definirse en términos de los residuales, como sucede en los procesos CUSUM y MOSUM, se especifica con base en las estimaciones de los coeficientes de regresión<sup>7</sup>. Teniendo en cuenta este hecho, Ploberger *et al.* (1989) definen la siguiente estadística (Recursive Estimates):

$$Y_n(s) = \frac{\sqrt{i}}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \left( X^{(0,i)'} X^{(0,i)} \right)^{1/2} \left( \hat{\beta}^{(0,i)} - \hat{\beta}^{(0,n)} \right)$$

donde  $i = \lfloor k + s(n-k) \rfloor$  con  $s \in [0,1]$ .

De forma análoga al proceso MOSUM, Chu *et al.* (1995) sugieren una estadística similar a la anterior basada en estimaciones móviles (ME):

$$Z_n(s|h) = \frac{\sqrt{\lfloor nh \rfloor}}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \left( X^{(\lfloor nt \rfloor, \lfloor nh \rfloor)'} X^{(\lfloor nt \rfloor, \lfloor nh \rfloor)} \right)^{1/2} \left( \hat{\beta}^{(\lfloor nt \rfloor, \lfloor nh \rfloor)} - \hat{\beta}^{(n)} \right)$$

donde  $0 \leq s \leq 1-h$ .

Si los parámetros del modelo de regresión bajo estudio presentan un cambio estructural, el proceso recursivo debería mostrar un pico, mientras que, el proceso de estimación

<sup>7</sup> En el caso en que el modelo de regresión analizado solo incluya un intercepto, las pruebas basadas en residuales OLS y en estimaciones son equivalentes.



móvil debería presentar un cambio de nivel alrededor del periodo de tiempo donde se presenta el cambio estructural.

## 2.2 Pruebas F

Una forma alterna para investigar la existencia de cambios estructurales es a través del uso de pruebas estadísticas tipo F. Estas pruebas se diferencian con respecto a las de fluctuación en la hipótesis alterna. Mientras que las pruebas de fluctuación no especifican el tipo de cambio estructural en la hipótesis alterna, las pruebas F están diseñadas para probar la existencia de un solo cambio. En términos del modelo (1) las hipótesis consideradas por la prueba F son:

$$H_o : \beta_i = \beta \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$H_a : \beta_i = \begin{cases} \beta_A & i = 1, 2, \dots, i_0 \\ \beta_B & i = i_0 + 1, \dots, n \end{cases}$$

donde  $i_0$ , definido en el intervalo  $(k, n - k)$ , representa el posible punto de quiebre. Es de señalar que, Chow (1960) fue el primero en sugerir una prueba de cambio estructural de este tipo<sup>8</sup>. La principal desventaja de esta prueba es que supone que el punto de quiebre,  $i_0$ , debe ser conocido ex ante.

Para evitar el problema ya mencionado de la prueba de Chow, Quandt (1960) sugiere calcular la estadística F para todos los posibles puntos de quiebre y tomar su máximo valor. Sin embargo, este autor no especifica la distribución de probabilidad de esta estadística. Andrews (1993) y Andrews y Ploberger(1994) proponen agregar las estadísticas F de tres formas:

---

<sup>8</sup> En esta prueba se estima una regresión para cada una de las dos submuestras definidas por el punto de quiebre  $i_0$ , una forma de calcular la estadística de Chow es la siguiente:

$$F_{io} = \frac{\hat{u}'\hat{u} - \hat{e}'\hat{e}}{\hat{e}'\hat{e}/(n - 2k)}. \text{ En esta expresión } \hat{e} = (\hat{u}_A, \hat{u}_B)' \text{ son los residuales del modelo completo}$$

donde los coeficientes de las dos submuestras son calculados separadamente y  $\hat{u}$  son los residuales del modelo restringido, el cual es estimado con todas las observaciones. Bajo la hipótesis nula de estabilidad en el modelo, la estadística  $F_{io}$  sigue una distribución asintótica  $\chi^2$  con  $k$  grados de libertad y  $F_{io} / k$  sigue una distribución  $F$  con  $(k, n - 2k)$  grados de libertad.

$$\begin{aligned}\sup F &= \sup_{i \leq \bar{i}} F_i \\ \text{ave} F &= \frac{1}{\bar{i}-\underline{i}+1} \sum_{i=\underline{i}}^{\bar{i}} F_i \\ \exp F &= \log\left(\frac{1}{\bar{i}-\underline{i}+1} \sum_{i=\underline{i}}^{\bar{i}} \exp(0.5F_i)\right)\end{aligned}$$

donde  $\underline{i}, \bar{i}$  representan el límite inferior y superior del intervalo donde se pueden definir los posibles puntos de quiebre. Adicionalmente, los autores encuentran las distribuciones asintóticas correspondientes.

### 3. Mínimos cuadrados flexibles

La metodología de mínimos cuadrados flexibles propuesta por Kalaba y Tesfatsion (1989, 1990) se basa en el concepto de regresión lineal con coeficientes cambiantes a través del tiempo. Como lo señalan Lutkepohl y Herwartz (1996), los mínimos cuadrados flexibles son un método de estimación recursiva de las trayectorias de los coeficientes, a través del tiempo, en un modelo de regresión con parámetros cambiantes. En su forma estándar, la solución de los mínimos cuadrados flexibles captura cambios suaves en los coeficientes durante el período de análisis. La forma como tales coeficientes cambian a través del tiempo, es decir, la ecuación dinámica que los genera es desconocida. Sin embargo, en economía es razonable suponer que dicho cambio es suave.

En esta metodología se generan dos tipos de error de especificación en el modelo de regresión, los cuales pueden estar asociados con cada selección de un vector estimado  $b = (b_1, \dots, b_T)$  para la secuencia de vectores de coeficientes  $b_t$ . El error de medida residual está dado por la diferencia entre el valor observado  $y_t$  y el estimado por el modelo de regresión lineal, considerando el conjunto de información hasta el momento  $(t)$ , es decir,  $y_t - X_t' b_t$  y el error dinámico está conformado por la discrepancia entre los coeficientes estimados en  $(t+1)$  y en  $(t)$ ,  $b_{t+1} - b_t$ . La solución de mínimos cuadrados flexibles está definida como el conjunto de toda la secuencia de coeficientes estimados

$(b_1, \dots, b_T)$  que lleva a un vector de suma mínima cuadrática de errores de medida y de errores dinámicos, es decir, que alcanza la frontera residual eficiente<sup>9</sup>.

### 3.1 Regresión lineal con coeficientes cambiantes en el tiempo

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_T$  observaciones generadas por un modelo de regresión lineal con coeficientes cambiantes en el tiempo. Formalmente, se parte de dos supuestos, el primero expresa la relación lineal o especificación de medida:

$$y_t - X_t' b_t \approx 0 \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (2)$$

y el segundo se refiere a la especificación dinámica o estabilidad de los coeficientes:

$$b_{t+1} - b_t \approx 0 \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (3)$$

donde  $X_t' = (X_{1t}, \dots, X_{kt})$  es el vector fila de regresores exógenos conocidos en el momento  $(t)$  y  $b_t = (b_{1t}, \dots, b_{kt})'$  es el vector columna de coeficientes no conocidos. El problema se centra en determinar si la teoría es compatible con las observaciones. Es decir, en discernir si existe o no una secuencia de coeficientes estimados  $(b_1, \dots, b_T)$  que satisfagan las especificaciones de medida y dinámicas (2) y (3) en una aproximación aceptable para la muestra de observaciones bajo estudio.

### 3.2 Enfoque básico de los mínimos cuadrados flexibles

Cada secuencia de coeficientes estimados  $b = (b_1, \dots, b_T)$ <sup>10</sup> tiene asociados dos tipos de error de especificación del modelo. Es decir,  $b_t$  puede no satisfacer la especificación de medida o puede fallar en el cumplimiento de la especificación

<sup>9</sup> La frontera caracteriza la eficiencia alcanzada mediante un *trade-off* entre los residuales de medida y los residuales dinámicos. Es de señalar que, ninguna otra secuencia de coeficientes estimados produce, al mismo tiempo, un error de medida y un error dinámico tan pequeños, como aquella que define la frontera residual eficiente.

<sup>10</sup> Es de señalar que, en este contexto, al igual que en Kalaba y Tesfatsion (1989, 1990), no se diferencian en notación los parámetros de sus estimadores.

dinámica. El costo asignado a  $b$  por el primer tipo de error se determina mediante la siguiente suma cuadrada de residuales:

$$r_M^2(b; T) = \sum_{t=1}^T [y_t - X_t' b_t]^2 \quad (4)$$

en tanto que, el segundo costo está asociado a los errores dinámicos:

$$r_D^2(b; T) = \sum_{t=1}^{T-1} [b_{t+1} - b_t]' [b_{t+1} - b_t] \quad (5)$$

Tales costos permiten definir el conjunto posible de residuales en el tiempo ( $T$ ) como la colección de todas las posibles configuraciones de los residuales cuadráticos de los errores dinámicos y de medida, condicionales a las observaciones  $\{y_1, \dots, y_T\}$ , es decir:

$$P(T) = \{r_D^2(b; T), r_M^2(b; T) \mid b \in E^{Tk}\} \quad (6)$$

Dentro del conjunto posible de residuales se encuentra la frontera de eficiencia residual,  $P_F(T)$ , conformada por el vector minimal de la suma de los cuadrados de los residuales dinámicos y de medida en el momento ( $T$ ), condicional a la información dada. La secuencia de coeficientes estimados  $b = (b_1, \dots, b_T)$  que permiten alcanzar tal frontera se define como la estimación de mínimos cuadrados flexibles. En otras palabras, dicha estimación produce la secuencia de coeficientes estimados mínimamente incompatibles con la medición lineal y la estabilidad de los coeficientes.

### 3.3 Representación paramétrica de la frontera de eficiencia

La pregunta que surge de manera inmediata es ¿Cómo puede ser determinada la frontera de eficiencia residual?. La respuesta se centra en una familia parametrizada de problemas de minimización.

Dado  $\mu \geq 0$  y  $[X_1, \dots, X_T]$  una matriz  $k \times T$ , de rango completo  $k$ , de vectores conformados por las variables explicativas o regresores, se asigna a cada posible

secuencia de coeficientes estimados  $b = (b_1, \dots, b_T)$  un costo de incompatibilidad o función objetivo, el cual consiste en un promedio ponderado de los errores asociados de medida y dinámico, es decir:

$$C(b; \mu, T) = \mu r_D^2(b; T) + r_M^2(b; T) \quad (7)$$

Así, la función de costos de incompatibilidad  $C(b; \mu, T)$  generaliza el criterio de bondad de ajuste para la estimación de mínimos cuadrados ordinarios permitiendo que el vector de coeficientes  $b_i$  varíe a través del tiempo. Si  $\mu > 0$ , la secuencia de coeficientes estimados que minimiza la función de costos de incompatibilidad es notada como la solución de mínimos cuadrados flexibles al momento ( $T$ ), condicional a  $\mu$ :

$$b^{MCF}(\mu, T) = (b_1^{MCF}(\mu, T), \dots, b_T^{MCF}(\mu, T)) \quad (8)$$

Las sumas de los residuales cuadrados de los errores de medición y dinámico asociados a (8) se definen como sigue:

$$r_M^2(\mu, T) = r_M^2(b^{MCF}(\mu, T); T) \quad \text{y} \quad r_D^2(\mu, T) = r_D^2(b^{MCF}(\mu, T); T) \quad (9)$$

donde un punto  $(r_D^2, r_M^2)$  pertenece a la frontera de eficiencia residual  $P_F(T)$  si y solo si existe algún  $\mu \geq 0$  tal que  $(r_D^2, r_M^2) = (r_D^2(\mu, T), r_M^2(\mu, T))$ . La frontera de eficiencia residual toma la forma parametrizada, ecuación (10):

$$P_F(T) = \{r_D^2(\mu, T), r_M^2(\mu, T) \mid 0 \leq \mu < \infty\} \quad (10)$$

de tal forma que, al considerar: (i)  $\mu \rightarrow 0$ , la función de costos de incompatibilidad no pondera en el *prior* a la especificación dinámica. Por consiguiente,  $r_M^2$  es minimizado sin considerar  $r_D^2$  y (ii)  $\mu \rightarrow \infty$ , la función de costos de incompatibilidad le otorga absoluta prioridad a el *prior* de la especificación dinámica y  $r_M^2$  es minimizado sujeto a  $r_D^2 = 0$ , este caso coincide con la estimación de mínimos cuadrados ordinarios.

### 3.4 Representación matricial de la solución de los mínimos cuadrados flexibles

La representación matricial correspondiente a la función de costos de incompatibilidad y a la solución de mínimos cuadrados flexibles, ecuaciones (7) y (8), se deriva como sigue:

Sean:

$I$  la matriz identidad de orden  $k$

$X(T)' = (X_1, \dots, X_T)$  matriz de regresores, orden  $k \times T$

$b(T) = (b_1', \dots, b_T')$  vector columna de coeficientes, orden  $Tk \times 1$

$y(T) = (y_1, \dots, y_T)$  vector columna de observaciones, orden  $T \times 1$

$G(T) = \begin{bmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_T \end{bmatrix}$  matriz conformada a partir de los regresores, orden  $Tk \times T$

$A_t(\mu) = \begin{cases} X_1 X_1' + \mu I & \text{si } t = 1 \\ X_t X_t' + 2\mu I & \text{si } t \neq 1, T \\ X_T X_T' + 2\mu I & \text{si } t = T \end{cases}$

$A(\mu, T) = \begin{bmatrix} A_1(\mu) & -\mu I & 0 & \dots & 0 \\ -\mu I & A_2(\mu) & -\mu I & & \\ 0 & -\mu I & & & \\ & & & & 0 \\ & & & & -\mu I \\ 0 & \dots & 0 & -\mu I & A_T(\mu) \end{bmatrix}$

donde la función de costos de incompatibilidad puede ser expresada en forma matricial como:

$$C(b(T); \mu, T) = b(T)' A(\mu, T) b(T) - 2b(T)' G(T) y(T) + y(T)' y(T) \quad (11)$$

la condición de primer orden necesaria para que el vector  $b(T)$  minimice la función de incompatibilidad expresada en (11) implica que:

$$A(\mu, T)b(T) = G(T)y(T) \quad (12)$$

donde  $\forall \mu \geq 0, T \geq 1 \Rightarrow A(\mu, T)$  es positiva semidefinida. Adicionalmente, si  $\mu > 0$  y la matriz de regresores  $X(T)$  tiene rango completo  $k$ , entonces  $A(\mu, T)$  es positiva definida y la función de costos de incompatibilidad es una función estrictamente convexa de  $b(T)$ . Por consiguiente, de la ecuación (12) se tiene que la ecuación (11) es minimizada de manera única por el vector:

$$b^{MCF}(\mu, T) = A(\mu, T)^{-1} G(T)y(T) \quad (13)$$

En resumen, dado  $\mu > 0$  y  $\text{rango}(X(T)) = k$ , los mínimos cuadrados flexibles, MCF<sup>11</sup>, tiene una representación matricial en la ecuación (13). Es de señalar que, este enfoque conduce a un algoritmo numéricamente estable para la derivación secuencial de la solución MCF. Tal procedimiento secuencial produce de manera directa a  $b_t^{MCF} = (\mu, t)$ , en la medida en que son obtenidas las observaciones. Hecho que permite el chequeo de la constancia de los coeficientes.

#### 4. Resultados

La verificación de la posible existencia de un cambio estructural en el proceso de la inflación en Colombia, como también, la aplicación del estimador de mínimos cuadrados flexibles se lleva a cabo sobre los modelos uni-ecuacionales de curva de Phillips, P estrella modificado, precio relativo de los alimentos y escandinavo, Anexo1. La muestra de estudio se basa en información trimestral para el período comprendido entre 1980:01 y 2003:01.

En los cuadros 1 a 4, Anexo 2, se presentan los resultados obtenidos en la estimación, a través de mínimos cuadrados ordinarios, de los modelos de inflación anteriormente mencionados<sup>12</sup>. Las pruebas sobre comportamiento de los residuales,

<sup>11</sup> En español mínimos cuadrados flexibles, MCF. En inglés Flexible Least Squares, FLS.

<sup>12</sup> Es de señalar que, el modelo P\* modificado considera dos versiones del gap monetario. En la primera, el desequilibrio monetario se estima considerando M1, en tanto que, en la segunda, dicha estimación se basa en M1 ajustado, M1A.

llevadas a cabo sobre cada uno de los diferentes modelos, permiten concluir que en cada caso se cumplen los supuestos básicos del modelo de regresión. Adicionalmente, los residuales de cada modelo siguen la distribución normal univariada, la cual permite hacer inferencia sobre la relevancia de cada una de las variables explicativas dentro del correspondiente modelo y su coherencia económica.

#### 4.1 Pruebas de Estabilidad

El análisis sobre la estabilidad de los modelos de regresión, presentados en el Anexo 2, se lleva a cabo a través de las pruebas F y de las diferentes pruebas de fluctuaciones generalizadas explicadas en la sección 2. Los tests de fluctuaciones generalizados parten del modelo establecido para un conjunto de información dada y derivan un proceso empírico que captura las fluctuaciones sobre los residuales o sobre las estimaciones. Es de señalar que, en el presente trabajo, se utilizan dentro de los tests de fluctuaciones generalizadas los “*OLS-Based Cusum*”, “*Recursive Cusum*”, y “*recursive Mosum*” sobre los residuales y los “*Moving estimates*” o *ME*, y “*Recursive estimates*” sobre las estimaciones. Adicionalmente, se realiza un proceso de monitoreo<sup>13</sup> mediante “*Moving Estimates Test*” o *ME* y “*Recursive estimates o Fluctuation Test*”<sup>14</sup> que permiten reconocer la existencia de cambio estructural.

##### 4.1.1 Modelo de Curva de Phillips

Los “*P-values*” asociados a la prueba F y a las pruebas de fluctuaciones generalizadas “*OLS-Based Cusum*”, “*Standard Cusum o Rec Cusum*” y “*Recursive Mosum*” sobre los residuales del modelo de curva de Phillips no aportan, a un nivel de significancia  $\alpha = 5\%$  o nivel establecido, evidencia a favor de la existencia de cambio estructural<sup>15</sup>, Cuadro 1. Este mismo resultado se visualiza en el Anexo 3.1, gráficos 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.6. Los “*P-values*” asociados a las pruebas de fluctuaciones generalizadas sobre estimación, “*Moving estimates*” y “*recursive estimates*” sugieren que

---

<sup>13</sup> El procedimiento de monitoreo se considera cuando se tienen nuevas observaciones de los procesos. Como primer paso, las estimaciones son calculadas de forma secuencial utilizando toda la información disponible, es decir, datos históricos y las observaciones recientemente observadas. En una segunda etapa, estas estimaciones iniciales son comparadas con unas basadas únicamente en los datos históricos. El monitoreo también puede ser utilizado cuando se desea comparar dos submuestras de interés.

<sup>14</sup> Monitoreo con OLS-Based CUSUM test.

<sup>15</sup> Es de señalar que, las pruebas Standard Cusum y Recursive Mosum son llevadas a cabo sobre el modelo que no considera variables dummies o de intervención por problemas de singularidad en la matriz de diseño. Esta explicación es válida para los restantes modelos.



no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de cambio estructural, Cuadro 1. En particular, los gráficos 3.1.4 y 3.1.5, permiten concluir que existe evidencia de cambio estructural y que éste se encuentra asociado al parámetro correspondiente a la variable explicativa  $\pi_{t-4}$ . Las pruebas de monitoreo “*ME Test*”<sup>16</sup> y “*Fluctuation test*” consideran el período comprendido entre 1981:02 y 1997:04 como período histórico y el período comprendido entre 1998:01 y 2003:01 como de actualización de la información. Los resultados obtenidos a partir de dichas pruebas de monitoreo no sugieren evidencia de cambio estructural, gráficos 3.1.7 y 3.1.8. Así, la evidencia de cambio estructural en este modelo está asociada al coeficiente correspondiente a  $\pi_{t-4}$ .

#### 4.1.2 Modelo P\* modificado (considerando M1)

Los “*P-values*” correspondientes a la prueba F y a las pruebas “*OLS-Based Cusum*”, “*Standard o Rec Cusum*”<sup>17</sup> y “*Recursive Mosum*” sobre los residuales del modelo P\* modificado (considerando M1) no presentan , a un nivel de significancia  $\alpha = 5\%$ , evidencia de la existencia de cambio estructural, Cuadro 1 y Anexo 3.2, gráficos 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3. Sin embargo, la gráfica 3.2.6 asociada a las pruebas F muestra que existen cambios estructurales alrededor de 1995. Las pruebas de fluctuaciones generalizadas sobre las estimaciones, “*Moving estimates*” y “*recursive estimates*”, gráficos 3.2.4 y 3.2.5, permiten concluir que también existe evidencia de cambio estructural en el parámetro asociado a la variable explicativa  $\pi_{t-4}$ . Hecho que, de manera general, se confirma a través de los “*p-values*” asociados a tales pruebas, los cuales sugieren que no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de cambio estructural, Cuadro 1. Las pruebas de monitoreo “*ME Test*” y “*Fluctuation test*” consideran el período 1982:02 - 1997:04 como período histórico y el período 1998:01 - 2003:01 como período de actualización de la información. Los resultados obtenidos a partir de dichas pruebas de monitoreo sugieren evidencia de cambio estructural, gráficos 3.2.7 y 3.2.8. Es decir, la evidencia de cambio estructural en este modelo también está vinculada al coeficiente asociado al rezago de orden cuatro de la inflación y a cambios ocurridos en 1995 y en el período 1998-2003.

---

<sup>16</sup> En esta prueba se considera  $h = 0.25$ . Este valor se conserva en los restantes modelos.

<sup>17</sup> Decisión de borde.

#### 4.1.3 Modelo P\* modificado (considerando M1A)

Las distintas pruebas sobre cambio estructural llevadas a cabo sobre el modelo P\* modificado, considerando M1A, conducen a resultados similares a los ya presentados en 4.1.2. Es de señalar que, en este caso, las pruebas de monitoreo tienen como muestra histórica al período comprendido entre 1982:01 - 1997:04. Al igual que en el modelo que considera a M1, el cambio estructural en este modelo está determinado por el cambio estructural del parámetro asociado a  $\pi_{t-4}$  y a cambios ocurridos en el periodo 1998 – 2003 y 1995.

#### 4.1.4 Modelo de Precios Relativos de Alimentos

Los “*P-values*” asociados a las pruebas *OLS-Based Cusum*”, “*Standard Cusum*” y “*Recursive Mosum*” sobre los residuales del modelo de precios relativos de alimentos no sugieren, al nivel de significancia seleccionado, presencia de un cambio estructural, Cuadro 1 y Anexo 3.4, gráficos 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.3. Sin embargo, el p-value y la gráfica 3.4.6, ambos asociados a la prueba F, muestran que existe evidencia de cambios estructurales en la muestra. Los “*p-values*” asociados a los tests de fluctuaciones generalizadas sobre estimación, “*Moving estimates*” y “*recursive estimates*” sugieren que no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de cambio estructural, Cuadro 1. En particular, los gráficos 3.4.4 y 3.4.5, permiten concluir que existe evidencia de cambio estructural se observa en el coeficiente asociado a la variable explicativa  $\pi_t^{Alim}$  (dlpralim). Las pruebas de monitoreo “*ME Test*” y “*Fluctuation test*” consideran el período comprendido entre 1981:02 y 1997:04 como período histórico y el período comprendido entre 1998:01 y 2003:01 como de actualización de la información. Los resultados obtenidos a partir de dichas pruebas de monitoreo son contradictorios. El “*ME- Test*” no sugiere evidencia de cambio estructural, gráfico 3.4.7, en tanto que, el “*Fluctuation Test*”, gráfico 3.4.8, si la sugiere.

#### 4.1.5 Modelo Escandinavo

Los “*P-values*” asociados a la prueba F y a las pruebas de fluctuaciones generalizadas “*OLS-Based Cusum*”, “*Rec o Standard Cusum*” y “*Recursive Mosum*”<sup>18</sup>

---

<sup>18</sup> Decisión de borde.

sobre los residuales del modelo Escandinavo no aportan, a un nivel de significancia<sup>19</sup>  $\alpha = 5\%$ , evidencia a favor de la existencia de cambio estructural, Cuadro 1. Este mismo resultado se confirma en el Anexo 3.5, gráficos 3.5.1, 3.5.2 y 3.5.3. La gráfica 3.5.6 asociada a la prueba F muestra que existe evidencia de varios cambios estructurales en la muestra. Los “*p-values*” asociados a los tests “*Moving estimates*” y “*recursive estimates*” de fluctuaciones generalizadas sobre estimación, sugieren que no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de cambio estructural, Cuadro 1. En particular, los gráficos 3.5.4 y 3.5.5, permiten concluir que existe evidencia de cambio estructural está relacionada con los parámetros asociados a las variables explicativas  $\pi_{t-4}$  y  $\chi_t$ , crecimiento trimestral de la tasa de cambio real<sup>20</sup> (cretc). Las pruebas de monitoreo “*ME Test*” y “*Fluctuation test*” consideran el período comprendido entre 1981:02 y 1997:04 como período histórico y el período comprendido entre 1998:01 y 2003:01 como de actualización de la información. Los resultados obtenidos a partir de dichas pruebas de monitoreo sugieren evidencia de cambio estructural, gráficos 3.5.7 y 3.5.8.

Cuadro 1  
Pruebas de Estabilidad

	Curva de Phillips	P* (M1)	P* (M1A)	P. Relativos Alimentos	Escandinavo
Nivel de Significancia establecido: $\alpha = 0.05$					
Fluctuación sobre residuales					
OLS-Cusum*	0.7698	0.1038	0.1016	0.0538	0.3076
F-Test *	0.7270	0.3055	0.2713	0.0023	0.1981
REC-Cusum**	0.4339	0.0485	0.1151	0.2058	0.3670
REC-Mosum**	0.6720	0.5456	0.5132	0.6590	0.5729
Fluctuación sobre estimaciones					
ME test**	0.0100	0.0210	0.0100	0.0100	0.0180
Fluctuation test**	0.0743	0.0160	0.0176	0.0000	0.0004
Monitoreo					
Muestra 1	81:02 – 97:04	82:02 – 97:04	82:01 – 97:04	81:02 – 97:04	81:04 – 97:04
Muestra 2	98:01 – 03:01	98:01 – 03:01	98:01 – 03:01	98:01 – 03:01	98:01 – 03:01

\*Incluye variables *dummies* de intervención.

\*\*Excluye variables *dummies* de intervención

En resumen, a pesar de que algunas pruebas no indican evidencia de cambios estructurales, otras como las tipo F y la mayoría de las de monitoreo (Cuadro 1), en

<sup>19</sup> Nivel de significancia establecido para comparación.

<sup>20</sup> Decisión de borde.

las que se comparan las estimaciones de los modelos en las décadas de los ochenta y noventa con las estimaciones realizadas con muestras posteriores a 1998, si aportan evidencia de dichos cambios.

## 4.2 Estimación de Mínimos cuadrados flexibles

Debido a los cambios estructurales reconocidos anteriormente, el uso de métodos de estimación convencionales para el período de análisis puede producir pronósticos e inferencias inadecuadas. Por lo tanto, es necesario utilizar metodologías econométricas que permitan incorporar cambios estructurales, una alternativa es la técnica de mínimos cuadrados flexibles, MCF.

Así, el método de mínimos cuadrados flexibles es utilizado en la estimación de cada uno de los modelos considerados para el período comprendido entre 1980:01 y 2003:01. Dado que el vector de parámetros óptimo, ecuación (8), considera el parámetro  $\mu$  no conocido<sup>21</sup>, el ejercicio econométrico se centra en la generación de las estimaciones de los parámetros de los modelos asociadas a diferentes valores de  $\mu$ , como se plantea en la ecuación (13). Cabe señalar que, cada una de las estimaciones MCF corresponde a una secuencia de vectores de parámetros a través del tiempo. Es decir, para  $\mu = \mu^1$  se estiman la secuencia  $(\beta_1^1, \dots, \beta_T^1)$ , para  $\mu = \mu^2$  se tiene  $(\beta_1^2, \dots, \beta_T^2)$  y así sucesivamente.

El anexo 4 presenta los gráficos correspondientes a las fronteras de eficiencia para cada uno de los modelos bajo estudio. Los ejes X y Y corresponden a los costos del error dinámico,  $r_D^2$ , y del error de medida  $r_M^2$ , respectivamente. Es de señalar que, cada punto sobre las gráficas es generado mediante un  $\mu$  diferente.

La selección del  $\mu$  óptimo, y por ende de la secuencia de parámetros óptima, se lleva a cabo a través de la minimización de los errores de pronóstico considerando distintas medidas de evaluación<sup>22</sup> a diferentes horizontes.

---

<sup>21</sup> El cual pondera los costos del error de medida y del error dinámico.

<sup>22</sup> Véase, Anexo 5

Los cuadros 2 a 6 presentan, por horizonte y para cada modelo, los resultados obtenidos a través de MCF del  $\mu$  óptimo y sus respectivas medidas de evaluación de pronóstico<sup>23</sup>. Como también, las medidas de evaluación de los pronósticos obtenidos a través de mínimos cuadrados ordinarios,  $\mu = 0$ , como punto de comparación. Los pronósticos<sup>24</sup> se conforman sobre la inflación anual y se llevan a cabo a través de técnicas “rolling”, para el período comprendido entre 1999:01 y 2003:01. En los pronósticos obtenidos a través de MCO, los parámetros son re estimados en cada momento del tiempo. En el caso del método MCF, las estimaciones de los parámetros no son obtenidas a través de una técnica “rolling” debido a: (i) la técnica provee de una secuencia de estimaciones a través del tiempo y (ii) al costo computacional que dicha técnica implicaría.

Como se presenta en los cuadros 2 a 6, las medidas de evaluación de los pronósticos obtenidos mediante los mínimos cuadrados flexibles son considerablemente menores que aquellas obtenidas al utilizar como estimador los mínimos cuadrados ordinarios. Es decir, en promedio los errores de pronóstico asociados a los MCF son menores que aquellos derivados de MCO. Adicionalmente, se observa, para todos los modelos, un aumento en el nivel del  $\mu$  óptimo al considerar horizontes mayores. Hecho que esta vinculado al cambio estructural de las relaciones económicas y que se hace más evidente al considerar pronósticos en horizontes largos. Esto implica que el uso de MCO es inadecuado particularmente para generar pronósticos de tales horizontes.

---

<sup>23</sup> Es de señalar que, el  $\mu$  óptimo es aquel que está asociado al mínimo RMSE.

<sup>24</sup> Fuera de muestra.

Cuadro 2  
Modelo de Curva de Phillips

HORIZONTE Trimestres	NOBS	MU	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	UTHEIL
OLS							
1	17	-	1.363	15.925	0.921	10.949	0.920
2	16	-	1.995	24.010	1.308	16.372	0.836
3	15	-	1.853	23.229	1.489	19.117	0.744
4	14	-	2.035	26.285	1.809	23.563	0.784
5	13	-	2.133	28.828	1.968	26.351	0.811
6	12	-	2.105	31.034	1.946	27.377	0.726
Flexibles							
1	17	0.001	0.282	3.377	0.220	2.655	0.190
2	16	3.000	0.566	6.867	0.450	5.538	0.237
3	15	9.000	0.748	9.616	0.601	7.834	0.300
4	14	13.800	0.886	12.044	0.759	10.016	0.341
5	13	21.000	1.027	14.330	0.933	12.543	0.391
6	12	35.400	1.097	16.206	0.996	13.915	0.378

Cuadro 3  
Modelo P\* Modificado (M1)

HORIZONTE Trimestres	NOBS	MU	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	UTHEIL
OLS							
1	17	-	1.395	15.990	1.016	11.865	0.941
2	16	-	2.400	28.966	1.831	22.585	1.006
3	15	-	3.026	37.215	2.616	32.826	1.215
4	14	-	3.877	49.008	3.565	45.462	1.494
5	13	-	4.476	58.395	4.263	55.475	1.702
6	12	-	5.238	70.759	5.037	67.263	1.807
Flexible							
1	17	0.001	0.279	3.540	0.237	2.920	0.188
2	16	4.200	0.468	6.234	0.380	4.896	0.196
3	15	9.900	0.613	8.077	0.511	6.736	0.246
4	14	19.500	0.652	8.559	0.566	7.346	0.251
5	13	22.500	0.640	8.149	0.560	7.199	0.243
6	12	22.500	0.736	9.253	0.638	8.188	0.254

Cuadro 4  
Modelo P\* Modificado (M1A)

HORIZONTE Trimestres	NOBS	MU	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	UTHEIL
OLS							
1	17	-	1.509	17.553	1.122	13.241	1.018
2	16	-	2.617	32.071	2.035	25.326	1.096
3	15	-	3.371	42.566	2.952	37.555	1.353
4	14	-	4.353	56.807	4.048	52.589	1.677
5	13	-	5.106	68.622	4.916	65.047	1.942
6	12	-	6.010	83.067	5.843	79.028	2.073
Flexible							
1	17	0.001	0.264	3.258	0.208	2.545	0.178
2	16	1.350	0.512	6.763	0.370	4.718	0.214
3	15	2.850	0.719	9.169	0.592	7.572	0.288
4	14	6.750	0.916	12.103	0.755	9.840	0.353
5	13	8.250	1.070	14.064	0.858	11.269	0.407
6	12	9.750	1.287	17.070	1.091	14.422	0.444

Cuadro 5  
Modelo de Precios Relativos de los Alimentos

HORIZONTE Trimestres	NOBS	MU	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	UTHEIL
OLS							
1	17	-	1.060	12.275	0.699	8.211	0.715
2	16	-	1.790	23.519	1.321	17.175	0.750
3	15	-	2.382	32.330	1.855	24.840	0.956
4	14	-	3.080	42.404	2.564	34.795	1.187
5	13	-	3.572	51.473	3.173	43.920	1.359
6	12	-	4.139	60.995	3.727	52.515	1.428
Flexible							
1	17	0.001	0.331	3.454	0.241	2.736	0.224
2	16	2.400	0.618	8.071	0.530	6.851	0.259
3	15	5.400	0.929	12.927	0.821	10.925	0.373
4	14	11.400	1.300	18.426	1.194	16.063	0.501
5	13	30.000	1.476	21.754	1.289	17.958	0.561
6	12	50.400	1.645	24.664	1.423	20.276	0.568

Cuadro 6  
Modelo Escandinavo

HORIZONTE Trimestres	NOBS	MU	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	UTHEIL
OLS							
1	17	-	1.691	18.898	1.179	13.406	1.141
2	16	-	3.484	39.791	2.790	32.909	1.460
3	15	-	5.462	62.405	4.536	54.033	2.193
4	14	-	7.616	88.172	6.521	78.999	2.934
5	13	-	8.922	104.822	7.942	97.804	3.393
6	12	-	9.995	122.847	9.160	116.646	3.448
Flexible							
1	17	0.001	0.338	3.871	0.272	3.247	0.228
2	16	2.550	0.695	8.675	0.536	6.757	0.291
3	15	4.050	1.021	12.758	0.802	10.184	0.410
4	14	6.000	1.366	17.249	1.144	14.642	0.526
5	13	7.200	1.660	20.517	1.389	17.578	0.631
6	12	7.650	2.085	25.682	1.730	22.010	0.719

## 5. Conclusiones

En general los modelos macroeconómicos son claramente vulnerables a cambios estructurales. Primero, los parámetros pueden cambiar a través del tiempo e introducir errores en la relación histórica estimada. Segundo, como lo sugieren Basdevant y Hargreaves (2003), los modelos son generalmente basados en un conjunto limitado de relaciones causales, las cuales pueden ser relevantes en un período de la historia e irrelevantes en otro. Dado que la inferencia estadística descansa sobre la estabilidad de las relaciones causales, el reconocimiento de inestabilidad conlleva a la búsqueda de nuevas técnicas de estimación que consideren dichos cambios.

Las relaciones económicas planteadas a través de los modelos considerados, curva de Philips, P estrella, Escandinavo y de precios relativos de alimentos, presentan cambios estructurales durante el periodo de análisis, 1980:01 a 2003:01. La evidencia de tales cambios es encontrada mediante la utilización de diferentes pruebas estadísticas. En particular, la mayoría de las pruebas de monitoreo, en las que se comparan las estimaciones de los modelos en las décadas de los ochenta y noventa con las estimaciones realizadas con muestras posteriores a 1998, aportan evidencia clara de dichos cambios.



Debido al reconocimiento del cambio estructural en las relaciones económicas planteadas por los modelos ya mencionados, el uso de métodos de estimación convencionales puede producir pronósticos e inferencias inadecuadas. Por lo tanto, es necesario utilizar metodologías econométricas que permitan incorporar tales cambios, una alternativa de ellas es la técnica de mínimos cuadrados flexibles, MCF, desarrollada por Kalaba y Tesfatsion (1989, 1990).

Las medidas de evaluación de los pronósticos obtenidos mediante los mínimos cuadrados flexibles son considerablemente menores que aquellas obtenidas al utilizar como estimador los mínimos cuadrados ordinarios, MCO. Es decir, en promedio los errores de pronóstico asociados a los MCF son menores que aquellos derivados de los MCO. Adicionalmente, se observa que el uso de MCO es inadecuado particularmente para generar pronósticos de horizontes de órdenes mayores.

## Bibliografía

Andrews, D.W.K. (1993). "Tests for Parameter Instability and Structural Change With Unknown Change Point". *Econometrica*, 61, pp 821-856.

Andrews, D.W.K. and Ploberger, W. (1994). "Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative". *Econometrica*, 62, pp 1383-1414.

Arango, L. E. y A. González (1998), "Some evidence of smooth transition nonlinearity in Colombian inflation", Banco de la República, Borradores de Economía, No. 105.

Atta-Mensah, J. (1995), "The Empirical Performance of Alternative Monetary and Liquidity Aggregates", Working Paper 96-5, Bank of Canada.

----- (1996), "A modified P\*-Model of Inflation Based on M1", Working Paper 96-15, Bank of Canada.

Bank of International Settlements, BIS Papers, No.3 - Empirical studies of structural changes and inflation, 2001.

Basdevant, O. and D. Hargreaves (2003), "Modelling structural change: the case of New Zealand", Reserve Bank of New Zealand, Discussion Paper Series, April.

Brown R.L., Durbin, J. and J.M. Evans, (1975). "Techniques for testing the constancy of regression relationships over time". *Journal of the Royal Statistical Society*, B 37, pp 149-163.

Chow, G.C. (1960). "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions". *Econometrica* 28:3, pp 591-605.

Chu, C. (1989). "New Tests for Parameter Constancy in Stationary and Nonstationary Regression Models". University of California at San Diego.

Chu C., Hornik, K., and C. Kuan. (1995). "The moving-estimates test for parameter stability". *Econometric Theory*, vol. 11, pp 669-720.

Chow, G.C. (1960). "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions". *Econometrica* 28:3, pp 591-605.

Clements, M. and D. Hendry (1999), **Forecasting Non-stationary Economic Time Series**, The MIT Press, Zeuthen Lecture Book Series, Karl Gunnar Persson Editor.

Fillion, J.F. and A. Leonard (1997), "La courbe de Phillips au Canada: un examen de quelques hypotheses", Departement des Recherches, Banque du Canada.

Hallman, J., Porter R. and Small D. (1989), "M per Unit of Potential GNP as an anchor for the Price Level" Staff Study 157, Board of Governors of the Federal Reserve System.

----- (1991), "Is the Price Level Tied to the M2 Monetary Aggregate in the Long Run" American Economic Review Vol.81 No.4.

Hansen, B.E. (1990). "Lagrange Multiplier Tests for Parameter Instability in Non-Linear Models". University of Rochester.

Hansen, B.E. (1991). "A comparison of Tests for Parameter Instability: An Examination of Asymptotic Local Power", University of Rochester.

Hansen, B.E. (1992). "Testing for Parameter Instability in Linear Models", Journal of Policy Modeling 14(4), pp 517-533.

Jalil. M. A. y L. F. Melo (1998), "Una relación no lineal entre inflación y los medios de pago", Banco de la República, Borradores de Economía, No. 145.

Kramer, W., Ploberger, W. and Alt, R (1988). "Testing for Structural Change in Dynamic Models". Econometrica 56, pp 1355-1369.

Kalaba, R. and L. Tesfatsion, (1989), "Time-Varying Linear Regression Via Flexible Least Squares", Computers Math Applied, Vol. 17, No.89, pp 1215-1244.

----- (1990), "Flexible Least Squares for Approximately Linear Systems", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol 20, No.5, pp 978-989.

López, E. y M. Misas (1998), "Un examen empírico de la curva de Phillips en Colombia" Ensayos de Política Económica No. 34, Banco de la República.

Lutkepohl, H. and H. Herwartz (1996), "Specification of varying coefficient time series models via generalized flexible least squares", Journal of Econometrics, No. 70, pp 261-290.

Makridakis, S. and S. Wheelwright (1989), **Manual de Técnicas de Pronóstico**, Editorial Limusa.

Melo, L. F. y M. Misas (1998), "Análisis del comportamiento de la inflación trimestral en Colombia bajo cambios de régimen: una evidencia a través del modelo *Switching* de Hamilton", Banco de la República, Borradores de Economía, No. 86.

Meyer, L. H. (2000) "Structural Change and Monetary Policy", Speech Before the Joint Conference of the Federal Reserve Bank of San Francisco and the Stanford Institute for Economic Policy Research, Federal Reserve Bank of San Francisco, California, March 3. <http://www.federalreserve.gov/boarddocs/speeches/2000/20000303.htm>

Misas, M., E. López y L. F. Melo (1999), "La inflación desde una perspectiva monetaria: un modelo  $P^*$  para Colombia", Banco de la República, Borradores de Economía, No. 133.

Misas, M., E. López y P. Querubín (2002), "La inflación en Colombia: una aproximación desde las redes neuronales", Banco de la República, Borradores de Economía, No. 199.

Pindyck, R. and D. Rubinfeld (1997), **Econometric Models and Economic Forecasts**, McGraw-Hill International Editions, Fourth Edition.

Ploberger, W. and W. Kramer. (1992). "The CUSUM Test With OLS Residuals", *Econometrica*, 60, pp 271-285.

Ploberger, W., Kramer W. and K. Kontrus (1989). "A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model", *Journal of Econometrics*, 40, pp 307-318.

Quandt, R. (1960). Tests of the Hypothesis That a Linear Regression System Obeys Two Separate Regimes. *Journal of the American Statistical Association* 55, pp 324-330.

Ricketts and Rose (1995), "Inflation, Learning and Monetary Policy in the G7 economies" Bank of Canada, Working Paper 95-7.

Zeileis, A., Leisch, F., Kleiber, C. and K. Hornik. "Monitoring Structural Change in Dynamic Econometric Models". *Journal of Applied Econometrics*, forthcoming.

## Anexo 1

### Modelo Curva de Phillips<sup>25</sup>:

Este modelo está basado en el modelo triangular convencional de Phillips, el cual tiene en cuenta los cambios en las expectativas influenciados por el desarrollo de la política monetaria. La estimación de este modelo incorpora además de los choques de demanda y de oferta, los regímenes de inflación basados en los resultados de un modelo de Markov-switching, a través de una variable que mide la probabilidad de estado de mayor media de inflación. A nivel internacional, este procedimiento fue propuesto por Ricketts y Rose (1995) y Fillion y Leonard<sup>26</sup>. En la actualidad, este modelo utiliza como variables explicativas la inflación rezagada, la inflación de los bienes importados, una estimación de la brecha del producto y una variable switching que recoge la probabilidad.

$$\pi_t = \beta_0 + \beta_1\pi_{t-4} + \beta_2\pi_{t-2}^m + \beta_3gap_{t-1}^y + \beta_4P_t + \beta_5\delta_{1t} + \beta_6\delta_{2t} + \beta_7\delta_{3t} + \gamma's_{it} + \varepsilon_t$$

### Definiciones:

- $\pi_t$  es la primera diferencia del logaritmo del IPC fin de período
- $gap_t^y$  es la brecha del producto calculado por el método de Hodrick y Prescott con priors.
- $\pi_t^M$  es la primera diferencia del logaritmo de los precios de los bienes importados.
- $P_t$  es la probabilidad de estado de mayor media de inflación según el modelo de Switching de Hamilton.
- $\delta_{1t}$  es una variable dicótoma que toma el valor de uno en el tercer trimestre de 1985 y cero en el resto.
- $\delta_{2t}$  es una variable dicótoma que toma el valor de uno en el segundo trimestre de 1999 y cero en el resto.
- $\delta_{3t}$  es una variable dicótoma que toma el valor de uno en el segundo trimestre de 1986 y cero en el resto.
- $s_{it}$  son las variables dummies estacionales

<sup>25</sup> Véanse, López y Misas (1998).

<sup>26</sup> Véanse, Ricketts and Rose (1995) y Fillion, J.F. and A. Leonard (1997).

## 1. Modelo P estrella modificado<sup>27</sup>

El modelo P estrella original para la inflación fue propuesto por Hallman et al. (1989, 1991)<sup>28</sup>, el cual está basado en la teoría cuantitativa del dinero. En él se asume un ajuste lento de los precios ante cambios no anticipados de la oferta de dinero, de tal forma que las desviaciones de los precios de su nivel de largo plazo generan presiones inflacionarias.

El modelo P estrella modificado asume que la velocidad de circulación del dinero es no estacionaria y cambia su punto de partida respecto al modelo original<sup>29</sup>, sustituyendo la ecuación cuantitativa por una demanda de dinero de largo plazo. Así, el nivel de precios depende, entre otras, del desequilibrio monetario y de la brecha de la variable de escala.

### **P estrella modificado (dos versiones):**

$$\pi_t = \beta_0 + \beta_1\pi_{t-4} + \beta_2gap_{t-4}^{M1} + \beta_3P_t + \beta_4gap_{t-1}^{IPIR} + \beta_5\delta_{1t} + \beta_6\delta_{2t} + \beta_7\delta_{3t} + \gamma's_{it} + \varepsilon_t$$

$$\pi_t = \beta_0 + \beta_1\pi_{t-4} + \beta_2gap_{t-3}^{M1A} + \beta_3P_t + \beta_4gap_{t-1}^{IPIR} + \beta_5\delta_{1t} + \beta_6\delta_{2t} + \beta_7\delta_{3t} + \gamma's_{it} + \varepsilon_t$$

### **Definiciones:**

$gap_t^{M1}$  es el desequilibrio monetario (M1) obtenido a partir de un modelo vectorial de corrección de errores.

$gap_t^{M1A}$  es el desequilibrio monetario (M1 ajustado) obtenido a partir de un modelo vectorial de corrección de errores.

$gap_t^{IPIR}$  es la brecha del índice de producción industrial real de la encuesta manufacturera.

## 2. Modelo de Precio Relativo de Alimentos:

Este modelo busca capturar los efectos del choque de oferta más común como es el de los precios de los alimentos, así como controlar los choques de demanda utilizando

<sup>27</sup> Véase, Atta-Mensah (1995 , 1996)

<sup>28</sup> Véanse, Hallman, J., Porter R. and Small D. (1989, 1991)

<sup>29</sup> Véanse, Misas et al. (1999).

una estimación de la brecha del producto y de la oferta monetaria. La proyección del precio de los alimentos se considera exógena y es construida con otro modelo que proyecta la inflación de alimentos en función de su dinámica pasada y de la probable evolución de la cantidad de lluvias. El modelo está complementado con la evolución de la cantidad de dinero definido como M1, con la brecha del producto y con rezagos de la inflación.

$$\pi_t = \beta_0 + \beta_1\pi_{t-1} + \beta_2\pi_{t-2} + \beta_3\pi_{t-4} + \beta_4\pi_t^R + \beta_5\pi_{t-4}^R + \beta_6gap_{t-1}^y + \beta_7\delta_{1t} + \beta_8\delta_{3t} + \beta_9\delta_{4t} + \gamma's_{it} + \varepsilon_t$$

**Definiciones:**

$\pi_t^R$  es la primera diferencia del logaritmo del precio relativo de alimentos (IPC alimentos/ IPC total)

$\delta_{4t}$  es una variable dicótoma que toma el valor de uno en el segundo trimestre de 1985 y cero en el resto

**3. Modelo Escandinavo:**

Este modelo sigue la tradición “escandinava”, en donde la inflación de una economía abierta y pequeña está determinada principalmente por factores de costo como el crecimiento de los salarios reales y por la devaluación real.

$$\pi_t = \beta_0 + \beta_1\pi_{t-1} + \beta_2\pi_{t-4} + \beta_3\chi_t + \beta_4\omega_t + \beta_5\delta_{1t} + \beta_6\delta_{2t} + \beta_7\delta_{3t} + \gamma's_{it} + \varepsilon_t$$

**Definiciones:**

$\chi_t$  es el crecimiento trimestral de la tasa de cambio real.

$\omega_t$  es el crecimiento trimestral del salario real de la industria.

## Anexo 2

### Cuadro 1

#### Modelo de Curva de Phillips

Dependent Variable: DLIPC				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1981:2 2003:1				
Included observations: 88 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.013183	0.003952	3.335660	0.0013
$\delta s_1$	0.014818	0.003978	3.724888	0.0004
$\delta s_2$	0.011393	0.003286	3.467399	0.0009
$\delta s_3$	-0.003642	0.003114	-1.169459	0.2458
$\delta_3$	-0.084299	0.010956	-7.694257	0.0000
$\delta_1$	-0.041733	0.010494	-3.976816	0.0002
$\delta_2$	-0.038590	0.010347	-3.729724	0.0004
$P$	0.023038	0.003901	5.906446	0.0000
$gap_{-1}^y$	0.231547	0.055675	4.158919	0.0001
$\pi_{t-4}$	0.528279	0.073456	7.191740	0.0000
$\pi_{t-2}^m$	0.123000	0.047498	2.589600	0.0115
R-squared	0.866187	Mean dependent var	0.045108	
Adjusted R-squared	0.848809	S.D. dependent var	0.025462	
S.E. of regression	0.009900	Akaike info criterion	-6.276014	
Sum squared resid	0.007547	Schwarz criterion	-5.966347	
Log likelihood	287.1446	F-statistic	49.84306	
Durbin-Watson stat	1.733011	Prob(F-statistic)	0.000000	
Q-stat Lags 20		White Heteroskedasticity		
(P -value)	0.343000	Test, F-stat. (P-value)	0.14512	
Normality test				
Jarque-Bera (P-value)	0.349319			



**Cuadro 2.1**

**Modelo P\* modificado**

Dependent Variable: DLIPC				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1982:2 2003:1				
Included observations: 84 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.011169	0.003987	2.801451	0.0065
$\delta_1$	0.009426	0.004433	2.126202	0.0369
$\delta_2$	0.016618	0.005026	3.306264	0.0015
$\delta_3$	-0.000709	0.003804	-0.186434	0.8526
$\delta_3$	-0.078287	0.012852	-6.091245	0.0000
$\delta_4$	0.025792	0.012363	2.086253	0.0404
$gap_{t-1}^{IPIR}$	0.106166	0.037517	2.829792	0.0060
$\pi_{t-4}$	0.659613	0.077758	8.482843	0.0000
$P$	0.015879	0.004408	3.602462	0.0006
$gap_{t-4}^{M1}$	0.006401	0.002632	2.431660	0.0175
$\delta_2$	-0.032035	0.012676	-2.527243	0.0137
R-squared	0.824356	Mean dependent var	0.044644	
Adjusted R-squared	0.800295	S.D. dependent var	0.025751	
S.E. of regression	0.011508	Akaike info criterion	-5.970075	
Sum squared resid	0.009667	Schwarz criterion	-5.651754	
Log likelihood	261.7431	F-statistic	34.26127	
Durbin-Watson stat	1.588611	Prob(F-statistic)	0.000000	
Q-stat Lags 20		White Heteroskedasticity		
(P -value)	0.342000	Test, F-stat. (P-value)	0.139888	
Normality test				
Jarque-Bera (P-value)	0.228609			

**Cuadro 2.2**  
**Modelo P\* modificado**

Dependent Variable: DLIPC				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1982:1 2003:1				
Included observations: 85 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.007297	0.003753	1.944195	0.0557
$\delta_1$	0.008271	0.004450	1.858611	0.0671
$\delta_2$	0.017319	0.005482	3.158955	0.0023
$\delta_3$	0.002854	0.004436	0.643357	0.5220
$\delta_3$	-0.081922	0.012958	-6.322025	0.0000
$\delta_4$	0.023851	0.012559	1.899150	0.0614
$gap_{t-1}^{IPIR}$	0.105696	0.040080	2.637123	0.0102
$\pi_{t-4}$	0.738828	0.071911	10.27413	0.0000
$P$	0.017772	0.004445	3.998640	0.0001
$gap_{t-3}^{M1A}$	0.010287	0.005863	1.754557	0.0835
$\delta_2$	-0.039102	0.012902	-3.030684	0.0034
R-squared	0.818040	Mean dependent var	0.044853	
Adjusted R-squared	0.793451	S.D. dependent var	0.025670	
S.E. of regression	0.011666	Akaike info criterion	-5.943988	
Sum squared resid	0.010072	Schwarz criterion	-5.627880	
Log likelihood	263.6195	F-statistic	33.26832	
Durbin-Watson stat	1.615841	Prob(F-statistic)	0.000000	
Q-stat Lags 20		White Heteroskedasticity		
(P -value)	0.359000	Test, F-stat. (P-value)	0.158119	
Normality test				
Jarque-Bera (P-value)	0.206233			

**Cuadro 3**  
**Modelo de Precios Relativos de Alimentos**

Dependent Variable: DLIPC				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1981:2 2003:1				
Included observations: 88 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.008544	0.004793	1.782613	0.0787
$\delta_1$	0.018248	0.004736	3.853084	0.0002
$\delta_2$	-0.000688	0.004630	-0.148484	0.8824
$\delta_3$	-0.006067	0.003698	-1.640406	0.1051
$\delta_4$	0.024217	0.009997	2.422542	0.0178
$\delta_1$	-0.024339	0.010349	-2.351868	0.0213
$\delta_3$	-0.039494	0.010116	-3.904117	0.0002
$gap_{-1}^y$	0.136549	0.060743	2.247977	0.0275
$\pi_t^{Alim}$	0.512140	0.072088	7.104405	0.0000
$\pi_{t-4}^{Alim}$	-0.200136	0.083196	-2.405594	0.0186
$\pi_{t-1}$	0.188311	0.075858	2.482405	0.0153
$\pi_{t-2}$	0.121534	0.072870	1.667815	0.0995
$\pi_{t-4}$	0.503870	0.085727	5.877585	0.0000
R-squared	0.887217	Mean dependent var	0.045108	
Adjusted R-squared	0.869171	S.D. dependent var	0.025462	
S.E. of regression	0.009210	Akaike info criterion	-6.401533	
Sum squared resid	0.006361	Schwarz criterion	-6.035563	
Log likelihood	294.6675	F-statistic	49.16602	
Durbin-Watson stat	1.567536	Prob(F-statistic)	0.000000	
Q-stat Lags 20		White Heteroskedasticity		
(P -value)	0.078000	Test, F-stat. (P-value)	0.581621	
Normality test				
Jarque-Bera (P-value)	0.297892			

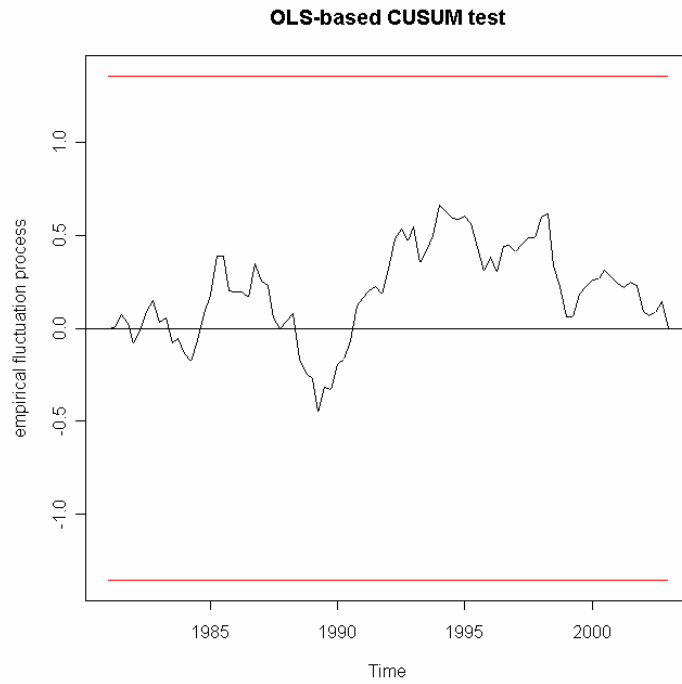
**Cuadro 4**  
**Modelo Escandinavo**

Dependent Variable: DLIPC				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1981:2 2003:1				
Included observations: 88 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002845	0.004020	0.707595	0.4813
$\delta_1$	-0.025100	0.012459	-2.014555	0.0474
$\delta_2$	-0.019222	0.006462	-2.974588	0.0039
$\delta_3$	-0.025470	0.006037	-4.219231	0.0001
$\delta_3$	-0.073180	0.012777	-5.727652	0.0000
$\delta_1$	-0.041668	0.012428	-3.352637	0.0012
$\delta_2$	-0.037985	0.012360	-3.073297	0.0029
$\pi_{t-1}$	0.499032	0.095718	5.213579	0.0000
$\pi_{t-4}$	0.431248	0.089898	4.797094	0.0000
$\chi_t$	0.114070	0.039418	2.893882	0.0049
$\omega_t$	0.201344	0.064238	3.134343	0.0024
R-squared	0.817183	Mean dependent var	0.045108	
Adjusted R-squared	0.793440	S.D. dependent var	0.025462	
S.E. of regression	0.011572	Akaike info criterion	-5.963968	
Sum squared resid	0.010311	Schwarz criterion	-5.654301	
Log likelihood	273.4146	F-statistic	34.41852	
Durbin-Watson stat	1.950250	Prob(F-statistic)	0.000000	
Q-stat Lags 20		White Heteroskedasticity		
(P -value)	0.299000	Test, F-stat. (P-value)	0.687927	
Normality test				
Jarque-Bera (P-value)	0.296785			

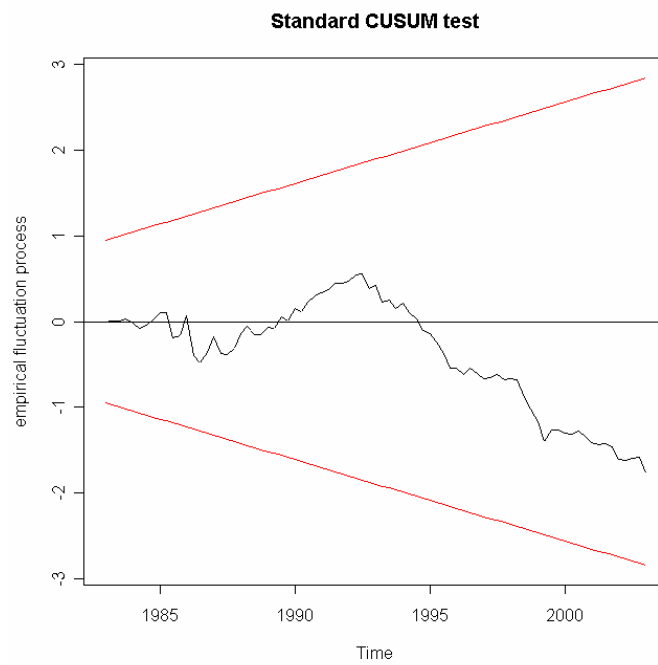
### Anexo 3.1

## Pruebas de Estabilidad sobre el Modelo de Curva de Phillips

### Gráfico 3.1.1

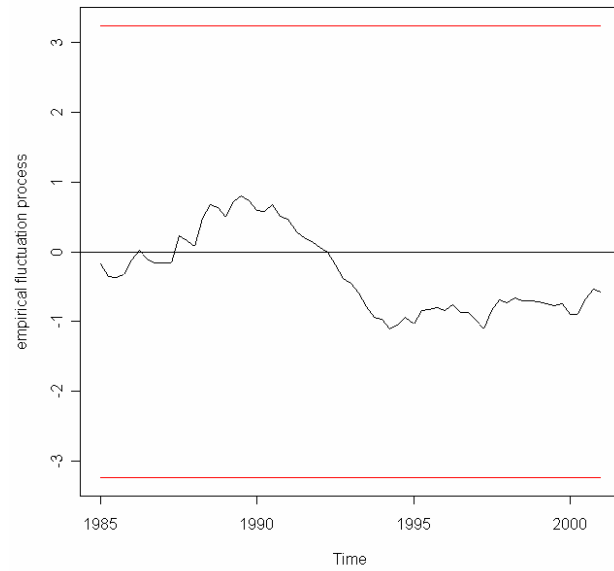


### Gráfico 3.1.2



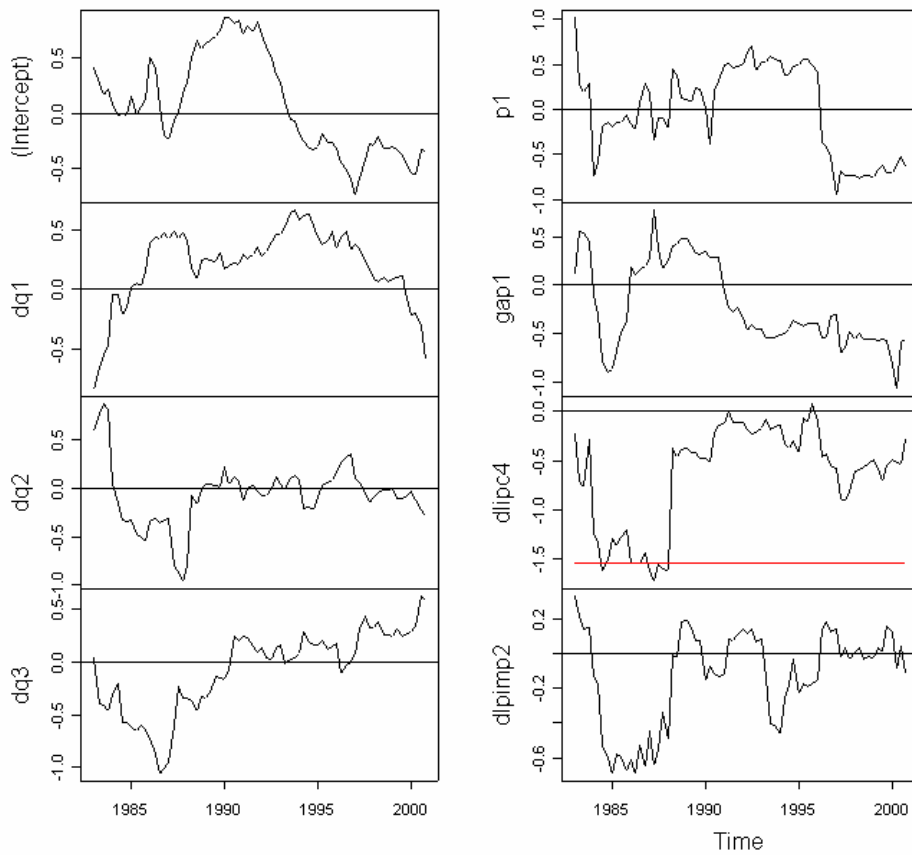
**Gráfico 3.1.3**

**Recursive MOSUM test**



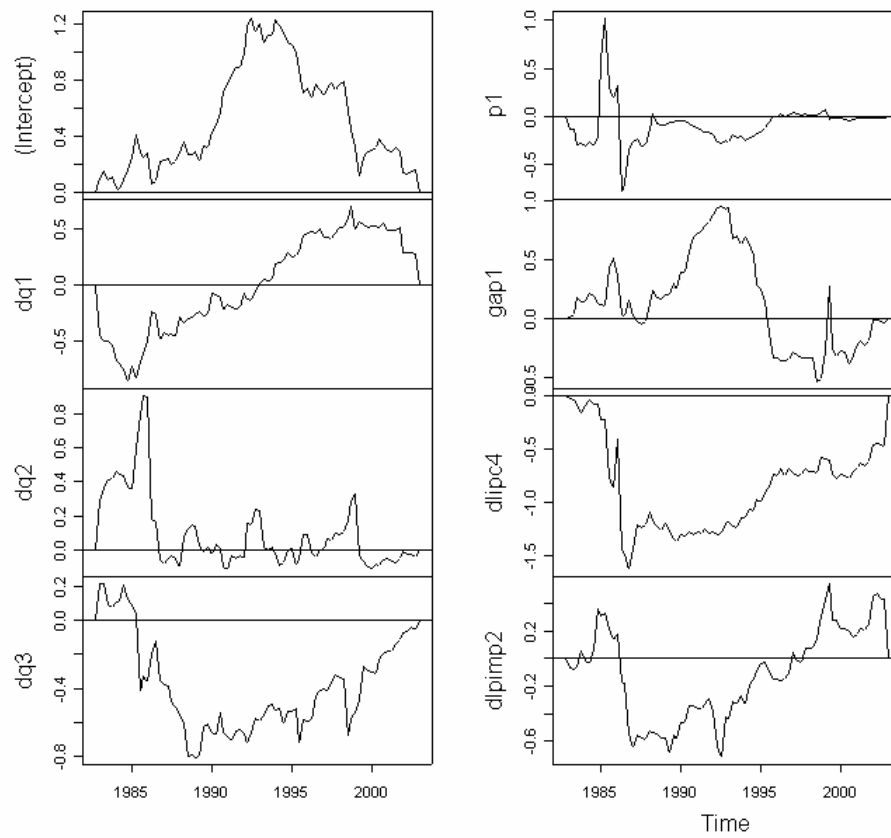
**Gráfico 3.1.4**

**ME test (moving estimates test)**



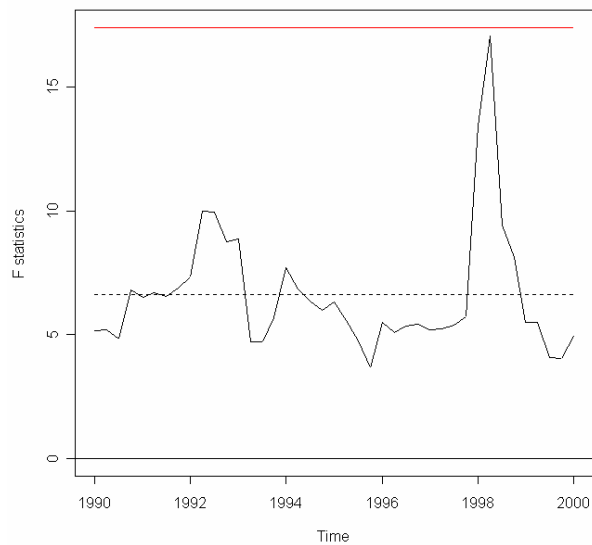
**Gráfico 3.1.5**

**Fluctuation test (recursive estimates test)**

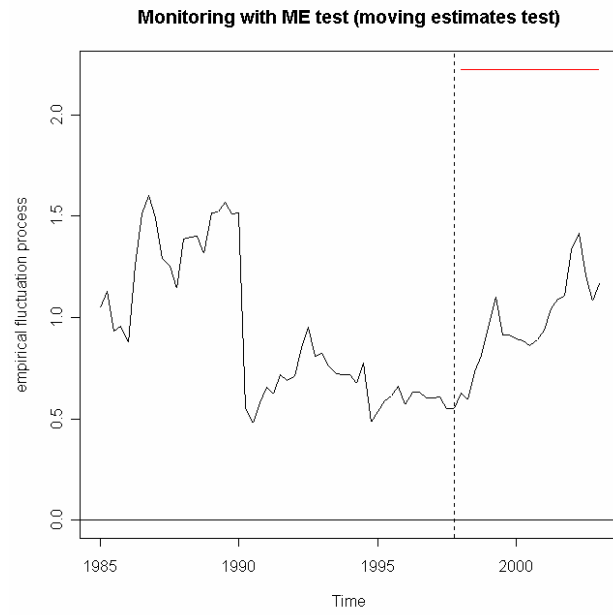


**Gráfico 3.1.6**

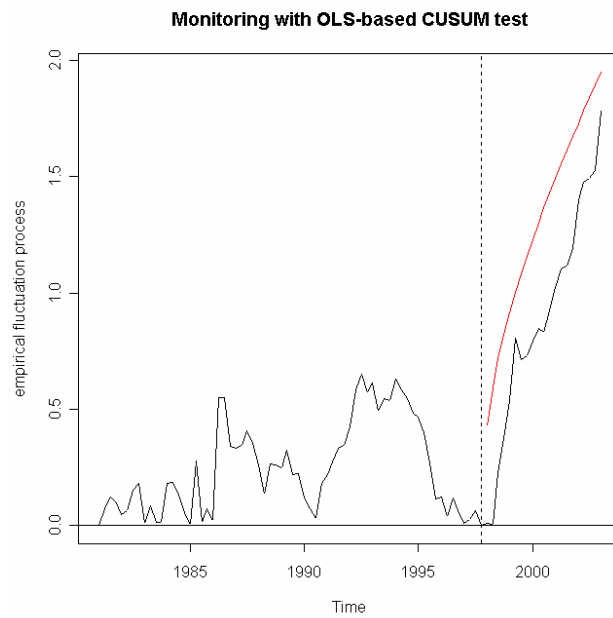
**F Test**



**Gráfico 3.1.7**



**Gráfico 3.1.8**

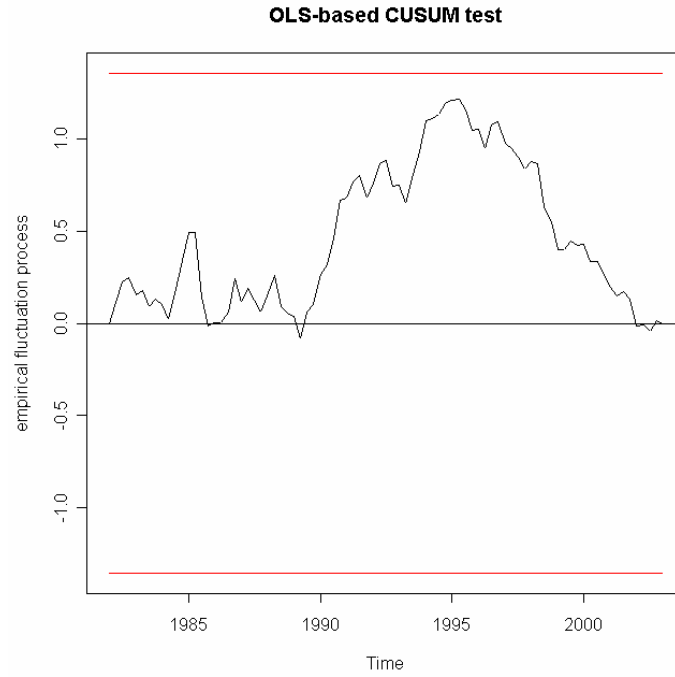




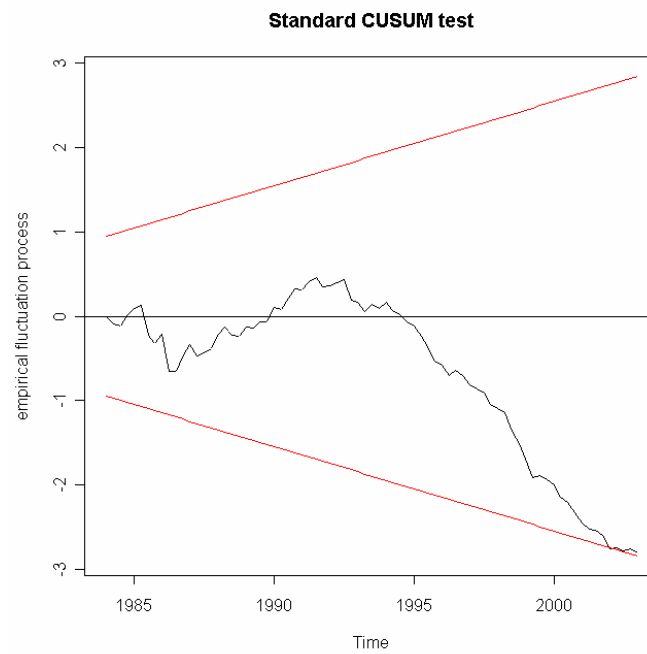
### Anexo 3.2

## Pruebas de Estabilidad sobre el Modelo P Estrella modificado (M1)

### Gráfico 3.2.1

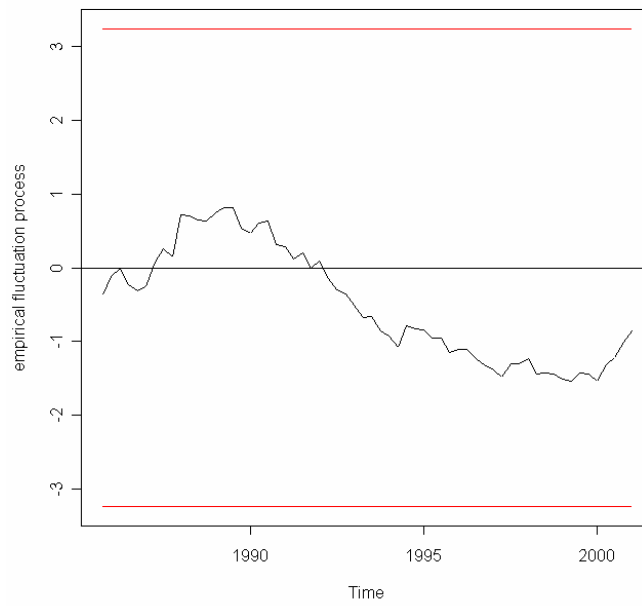


### Gráfico 3.2.2



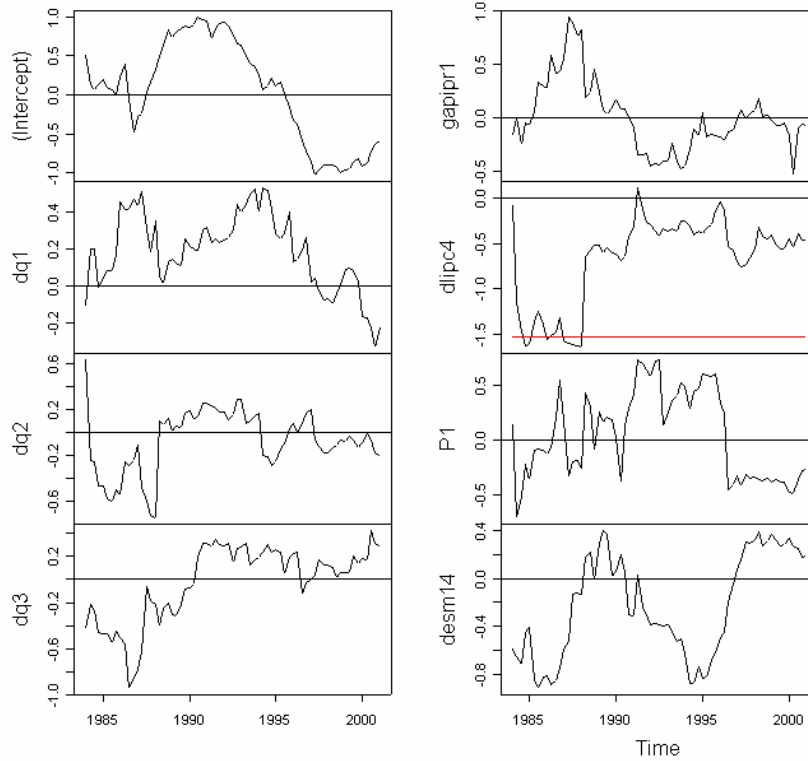
**Gráfico 3.2.3**

**Recursive MOSUM test**



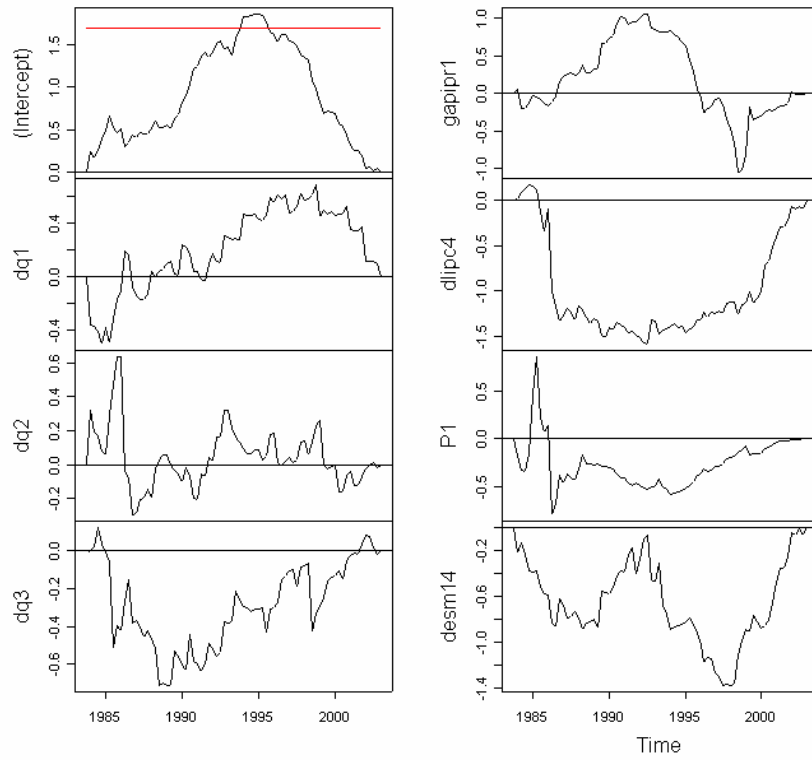
**Gráfico 3.2.4**

**ME test (moving estimates test)**



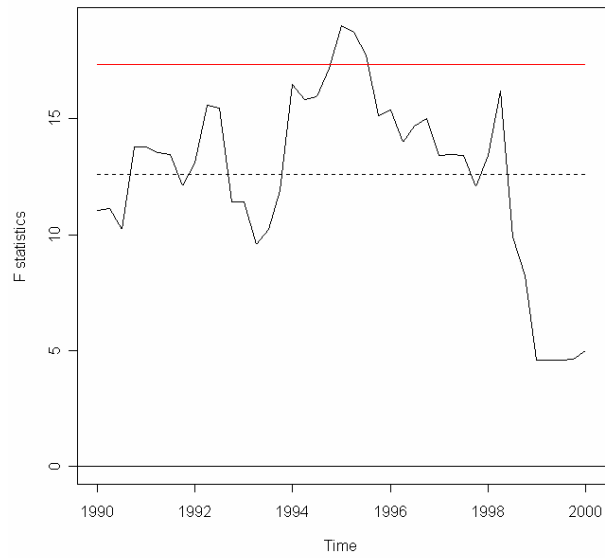
**Gráfico 3.2.5**

**Fluctuation test (recursive estimates test)**



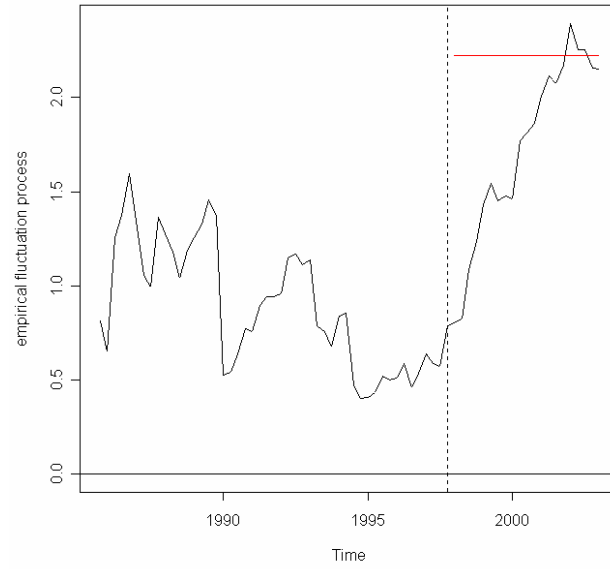
**Gráfico 3.2.6**

**F Test**



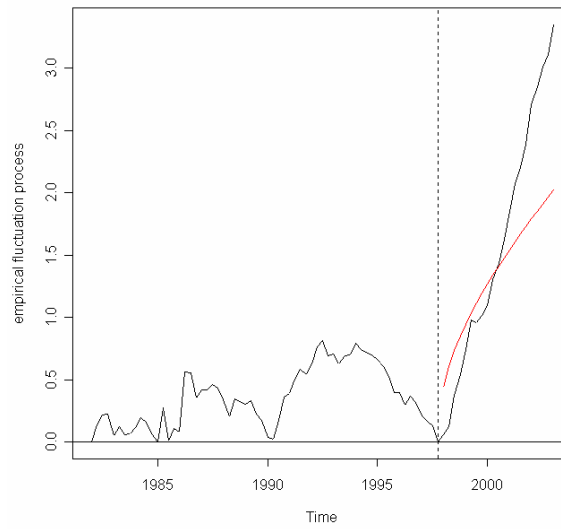
**Gráfico 3.2.7**

**Monitoring with ME test (moving estimates test)**



**Gráfico 3.2.8**

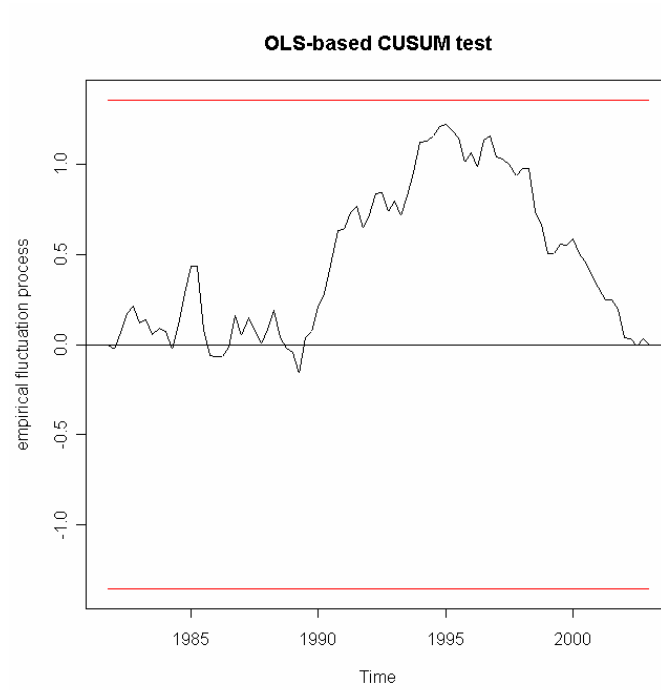
**Monitoring with OLS-based CUSUM test**



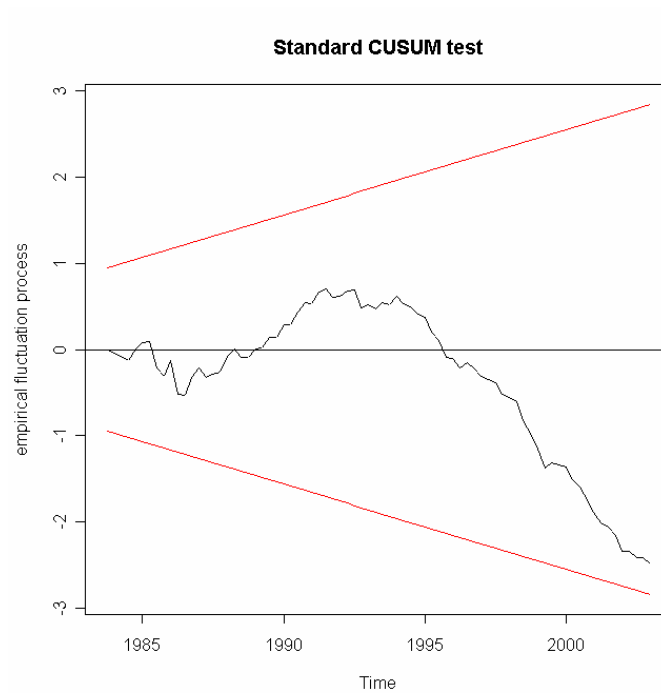
### Anexo 3.3

## Pruebas de Estabilidad sobre el Modelo P Estrella modificado (M1A)

### Gráfico 3.3.1

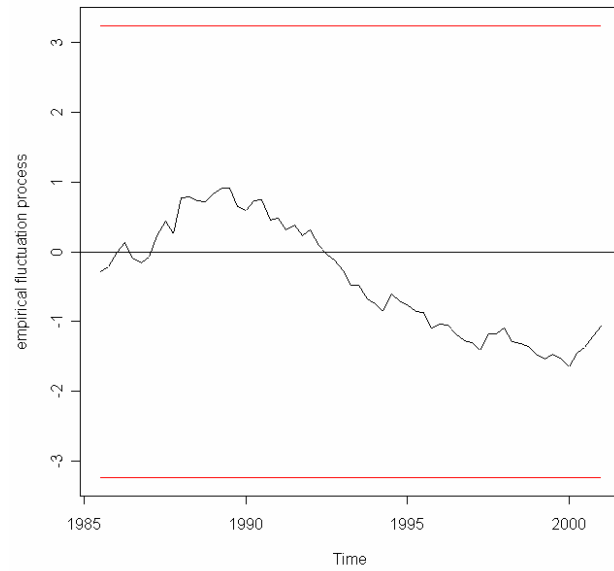


### Gráfico 3.3.2



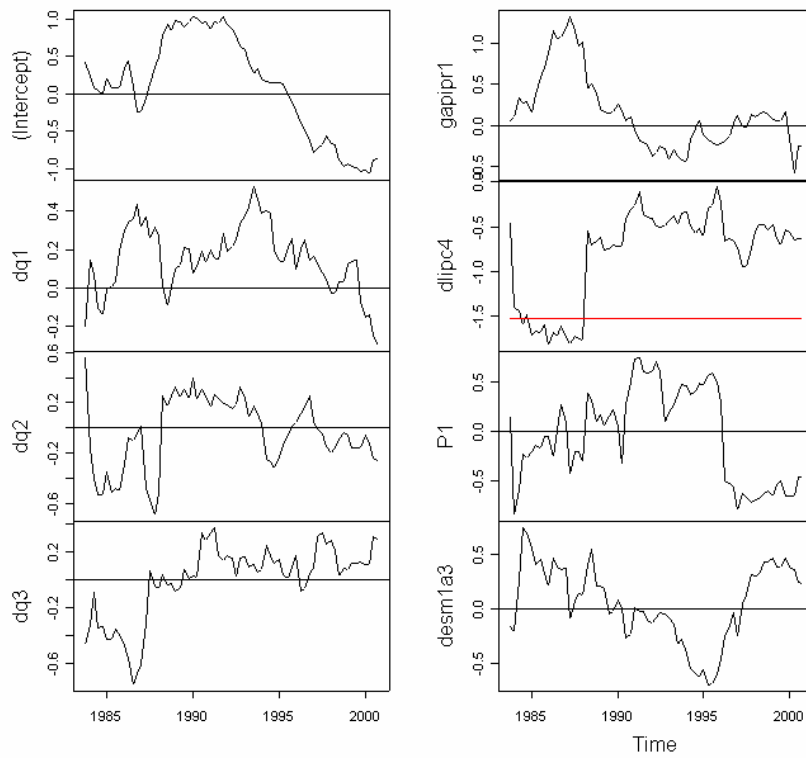
**Gráfico 3.3.3**

**Recursive MOSUM test**



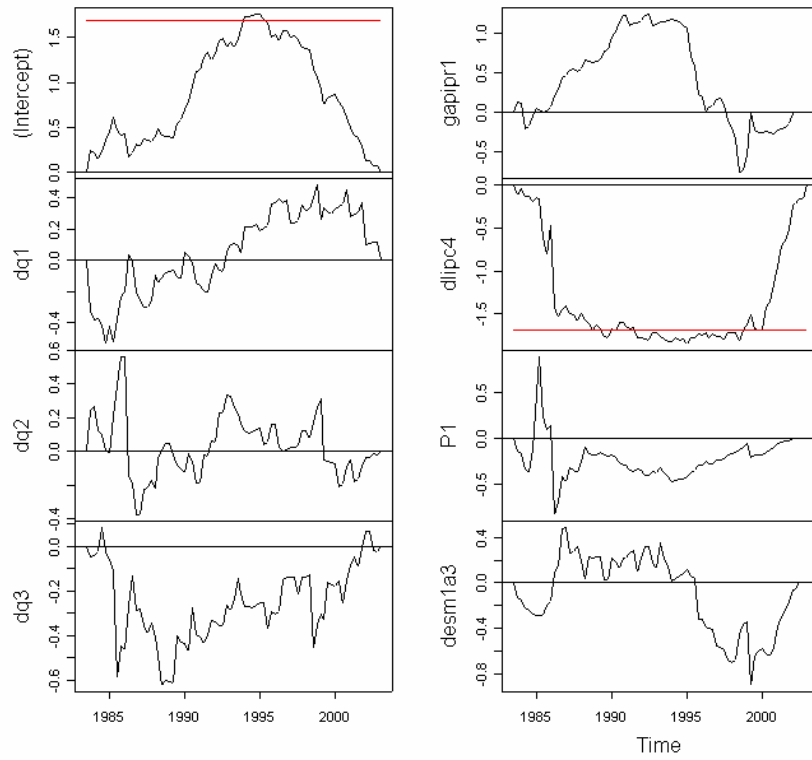
**Gráfico 3.3.4**

**ME test (moving estimates test)**



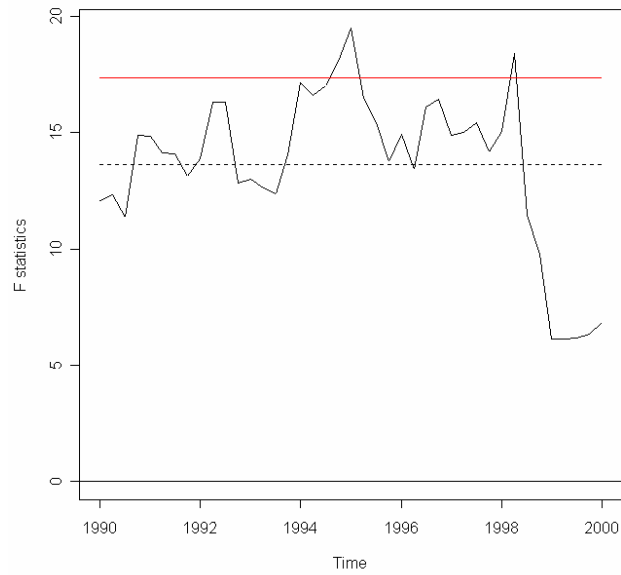
**Gráfico 3.3.5**

**Fluctuation test (recursive estimates test)**



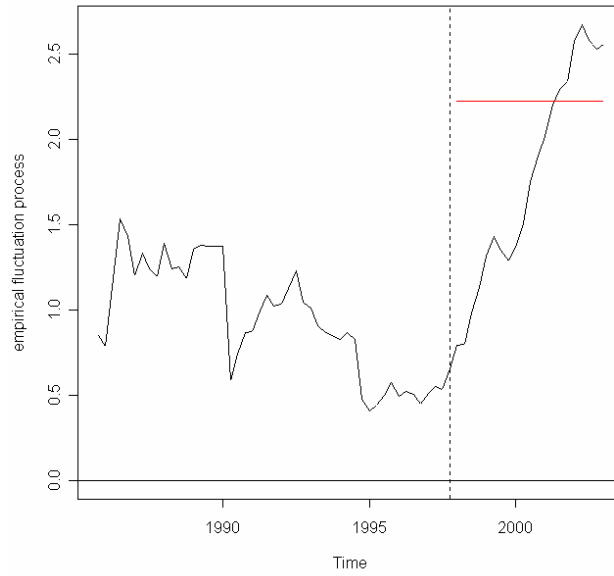
**Gráfico 3.3.6**

**F Test**



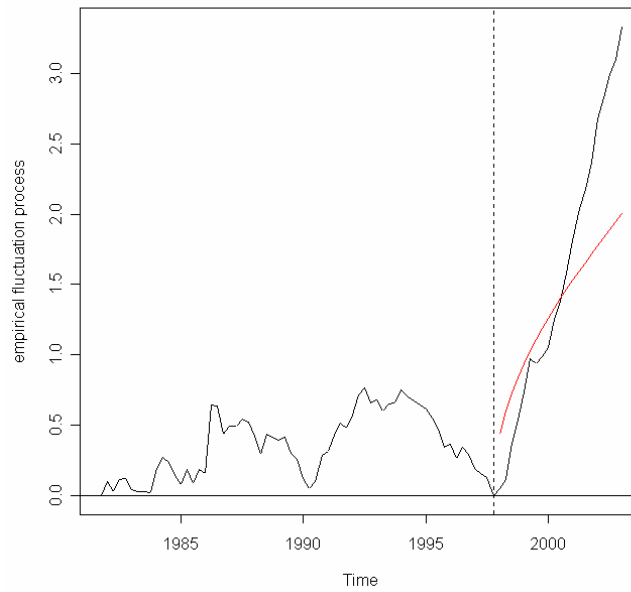
**Gráfico 3.3.7**

**Monitoring with ME test (moving estimates test)**



**Gráfico 3.3.8**

**Monitoring with OLS-based CUSUM test**

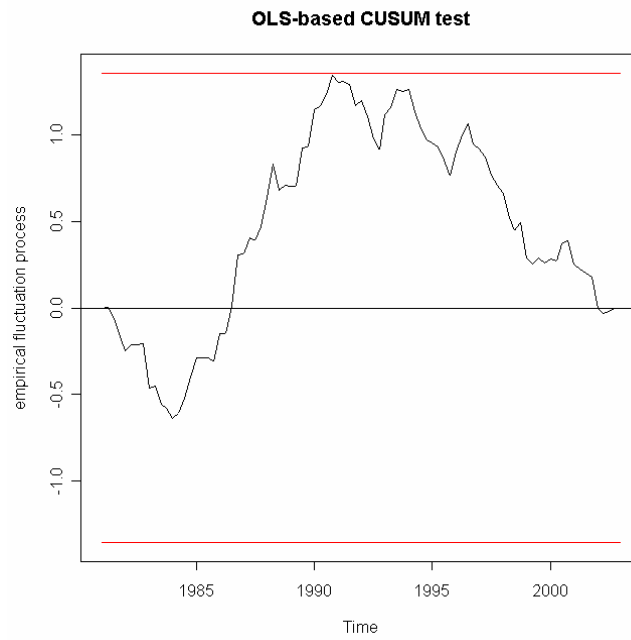




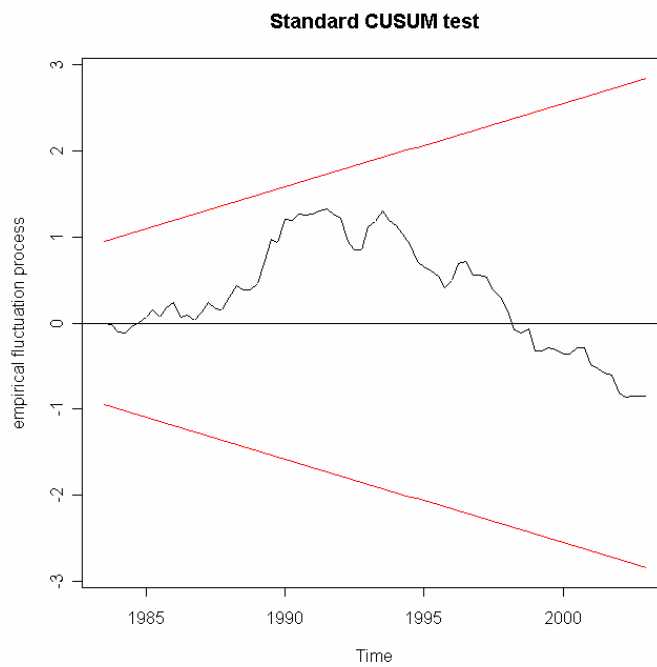
## Anexo 3.4

### Pruebas de Estabilidad sobre el Modelo de Precio Relativo de Alimentos

#### Gráfico 3.4.1

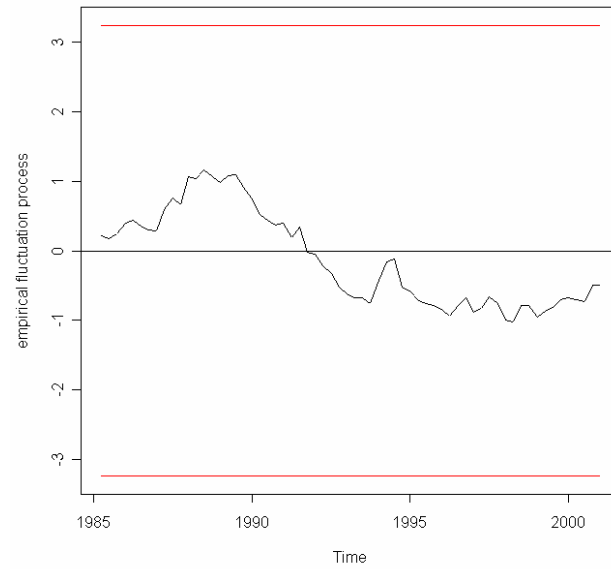


#### Gráfico 3.4.2



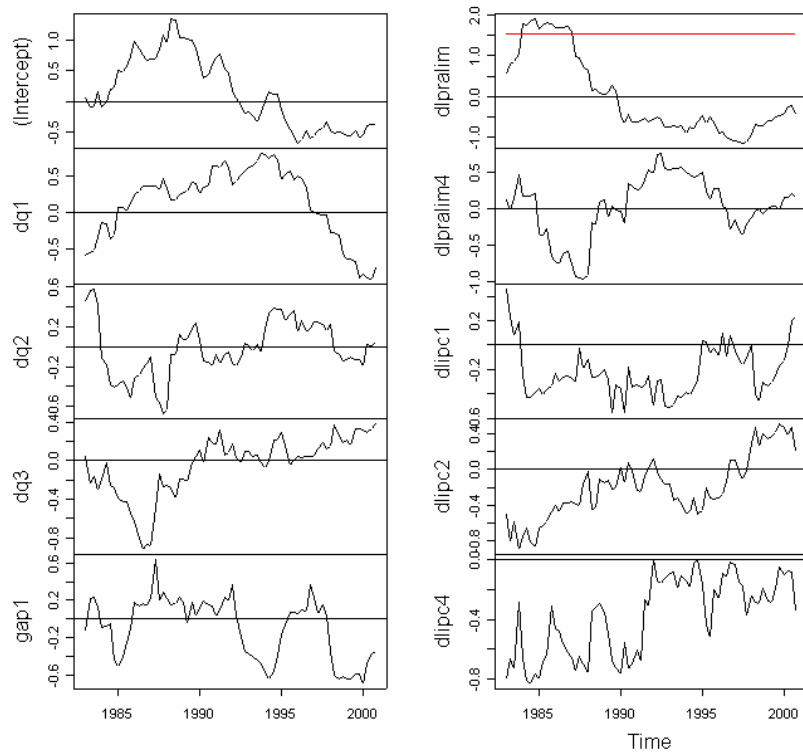
**Gráfico 3.4.3**

**Recursive MOSUM test**



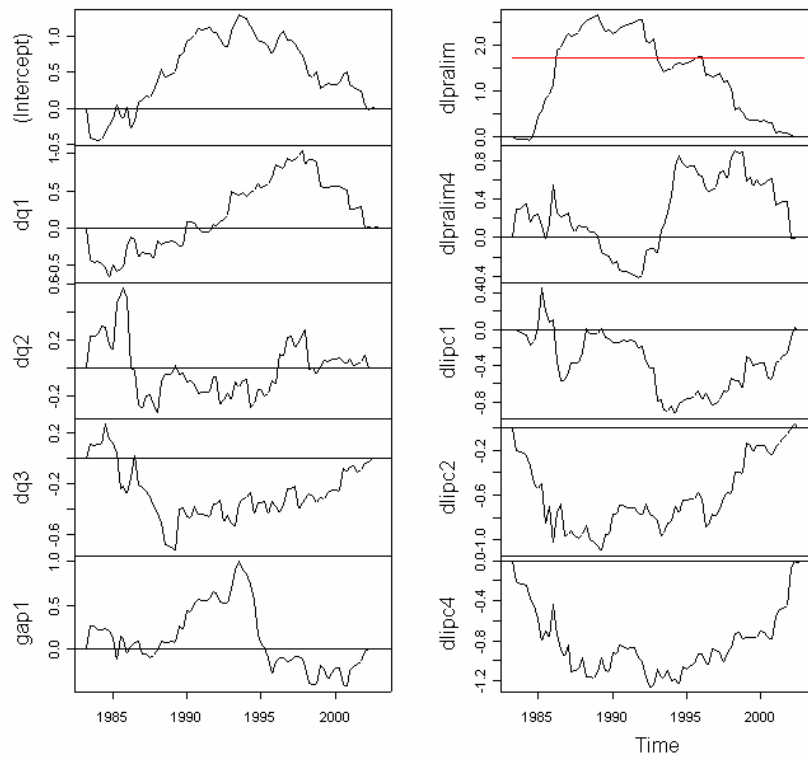
**Gráfico 3.4.4**

**ME test (moving estimates test)**



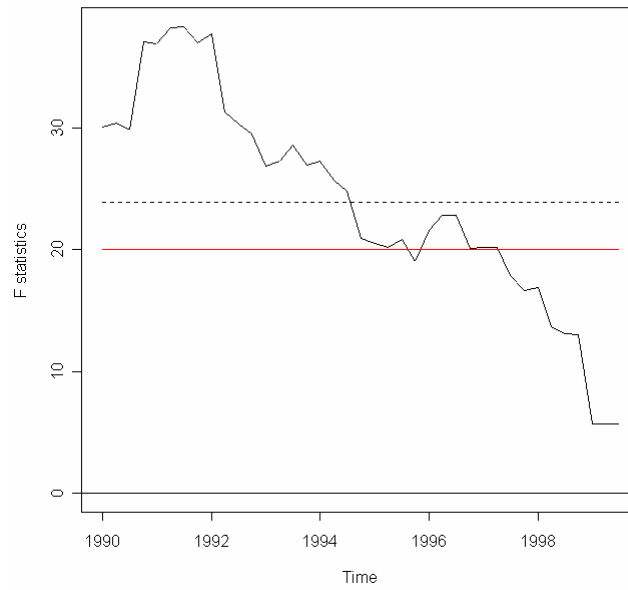
**Gráfico 3.4.5**

**Fluctuation test (recursive estimates test)**



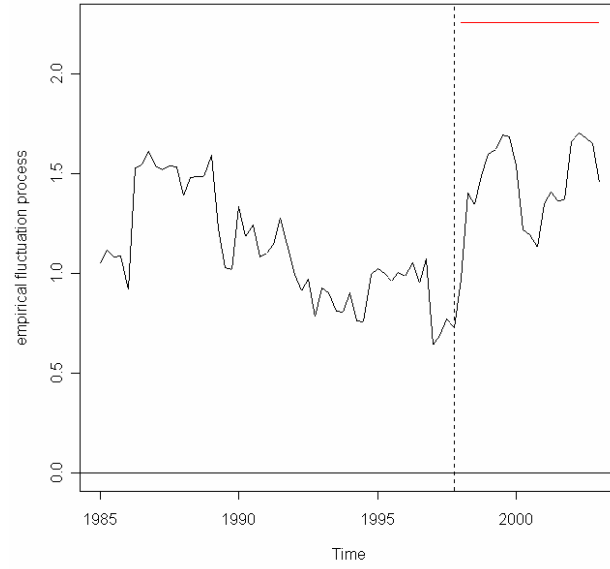
**Gráfico 3.4.6**

**F Test**



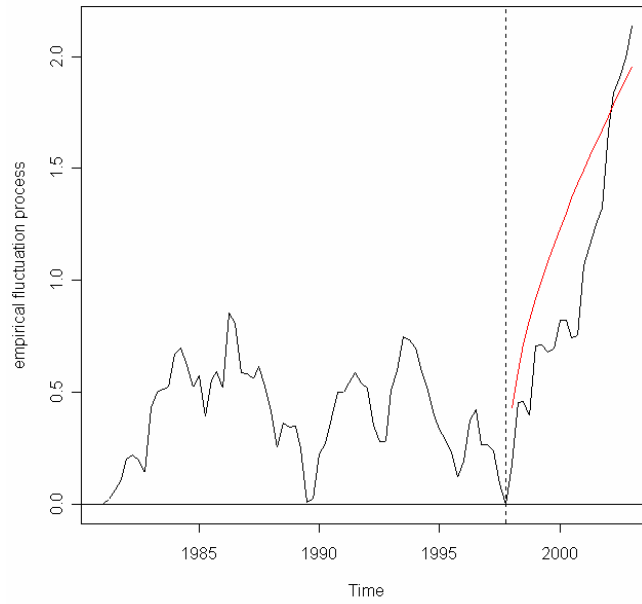
**Gráfico 3.4.7**

**Monitoring with ME test (moving estimates test)**



**Gráfico 3.4.8**

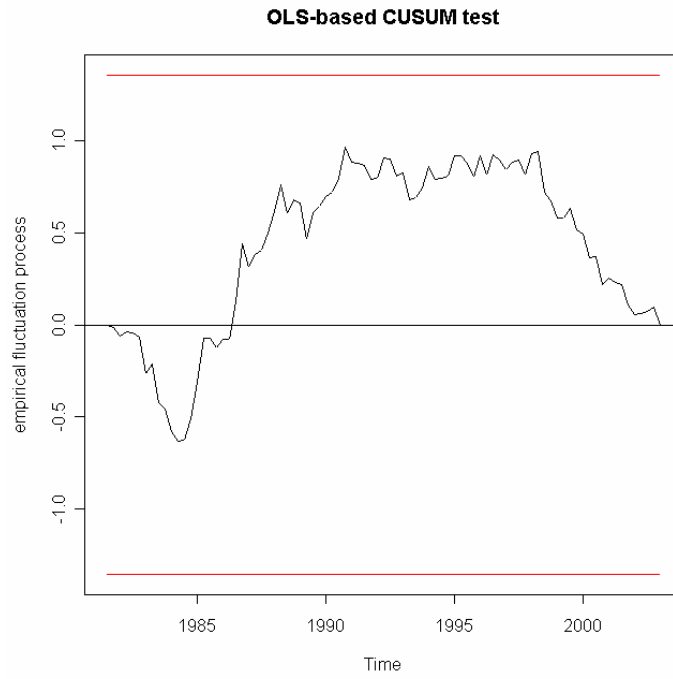
**Monitoring with OLS-based CUSUM test**



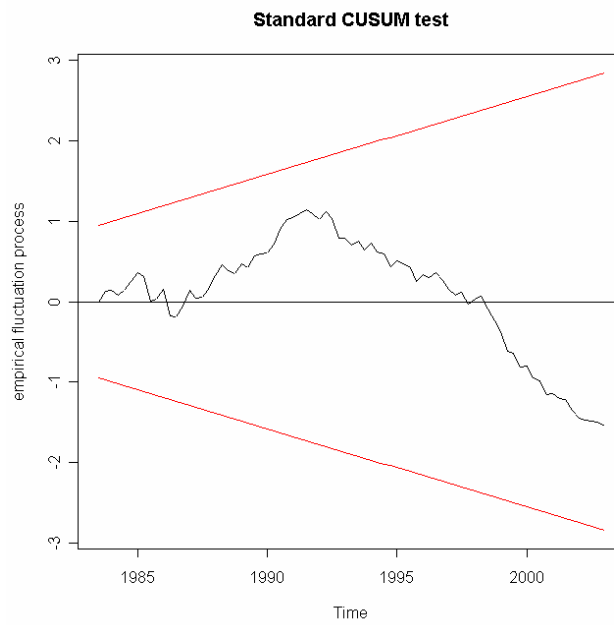
### Anexo 3.5

## Pruebas de Estabilidad sobre el Modelo Escandinavo

### Gráfico 3.5.1

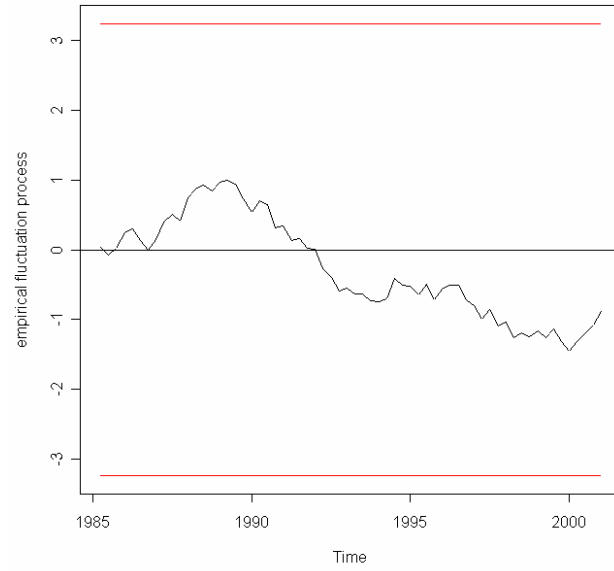


### Gráfico 3.5.2



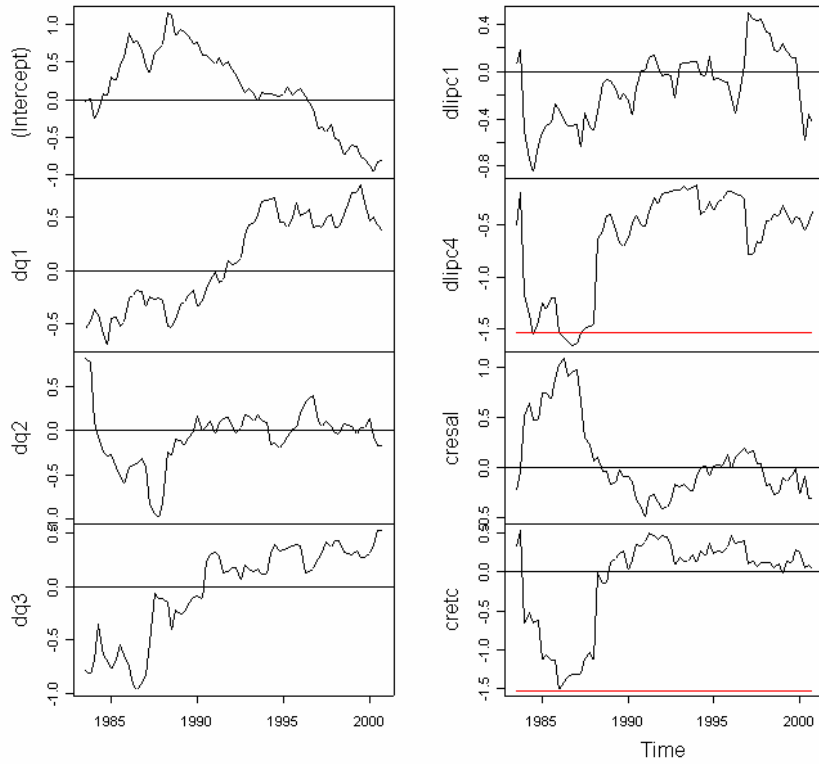
**Gráfico 3.5.3**

**Recursive MOSUM test**



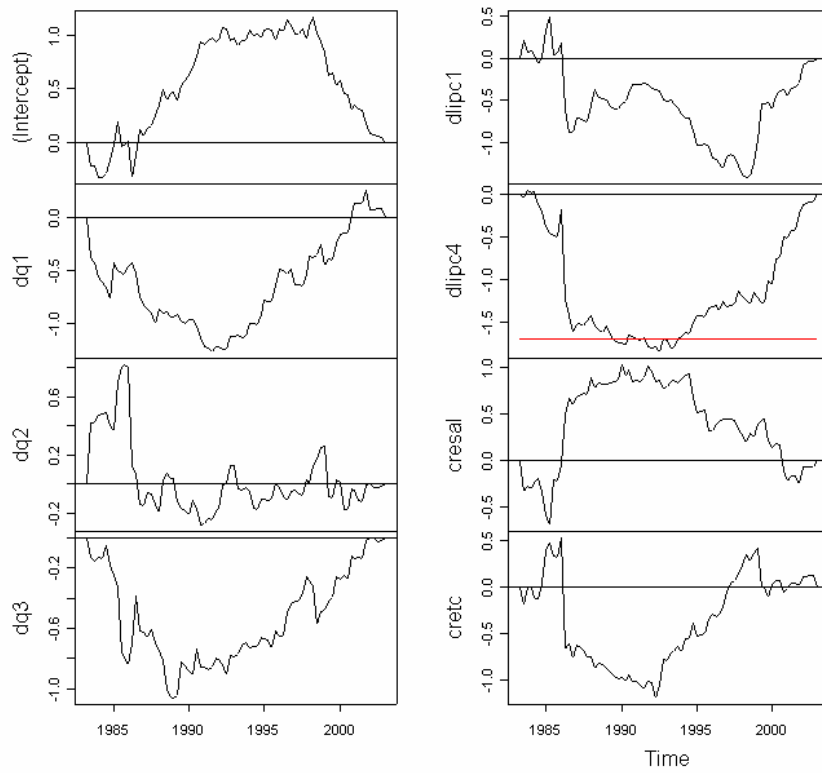
**Gráfico 3.5.4**

**ME test (moving estimates test)**



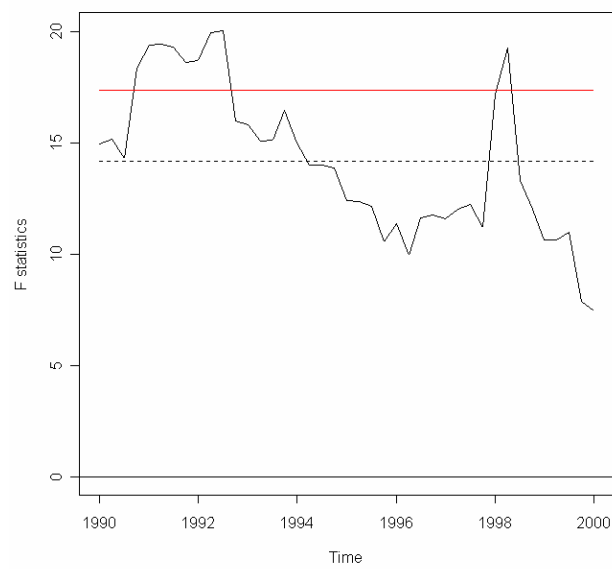
**Gráfico 3.5.5.**

**Fluctuation test (recursive estimates test)**



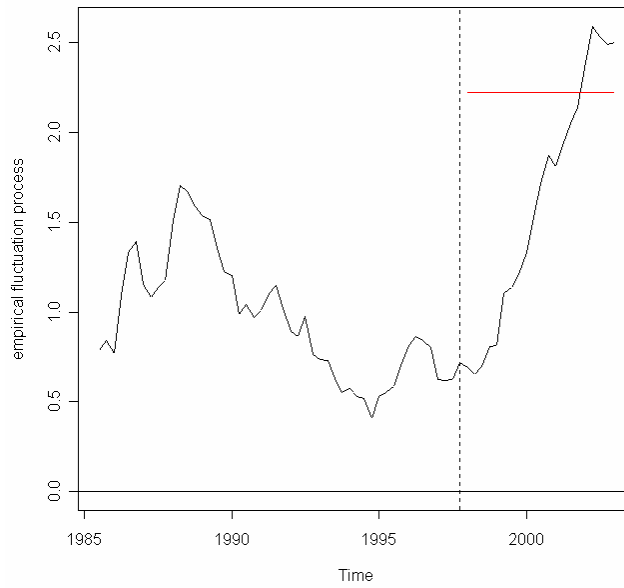
**Gráfico 3.5.6**

**F Test**



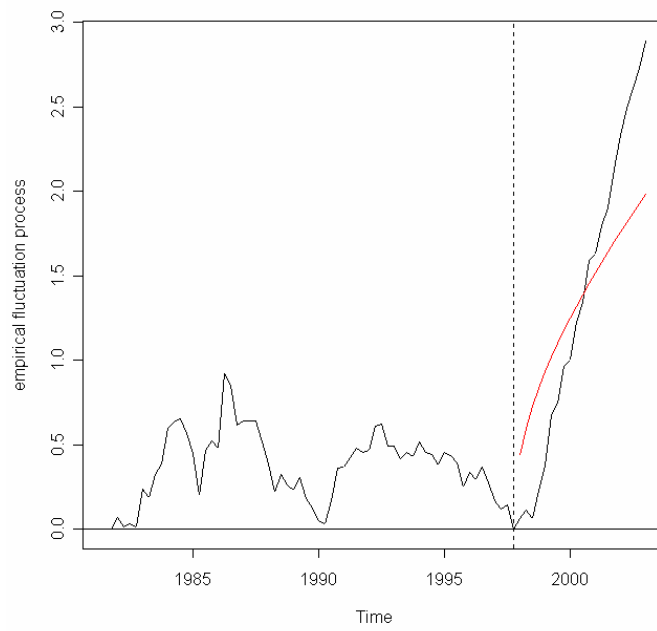
**Gráfico 3.5.7**

**Monitoring with ME test (moving estimates test)**



**Gráfico 3.5.8**

**Monitoring with OLS-based CUSUM test**

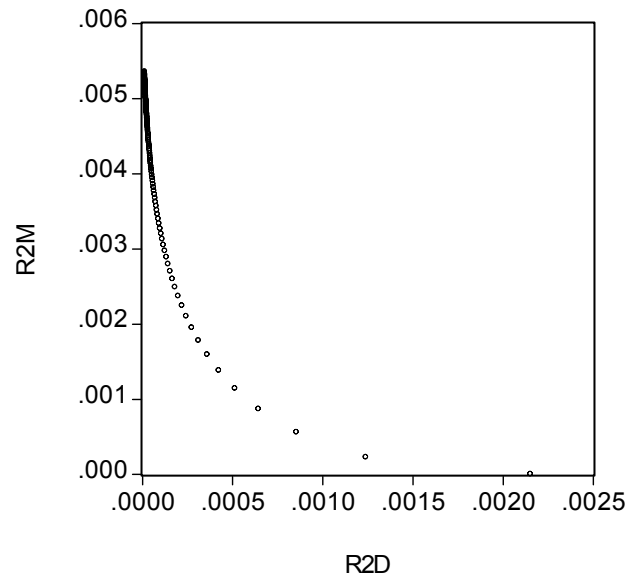




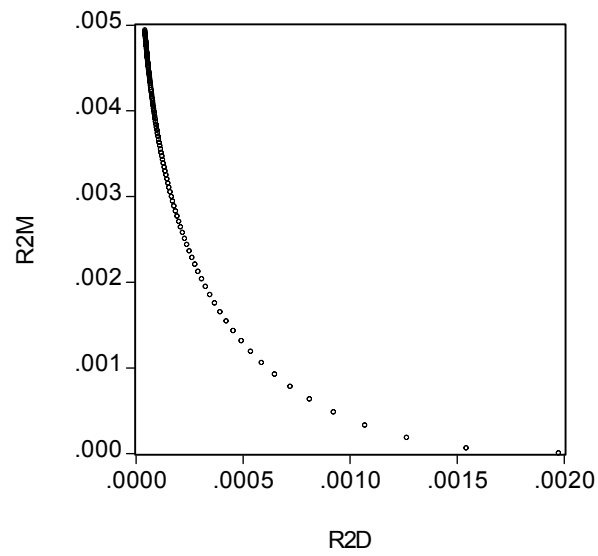
## Anexo 4

### Frontera de Eficiencia

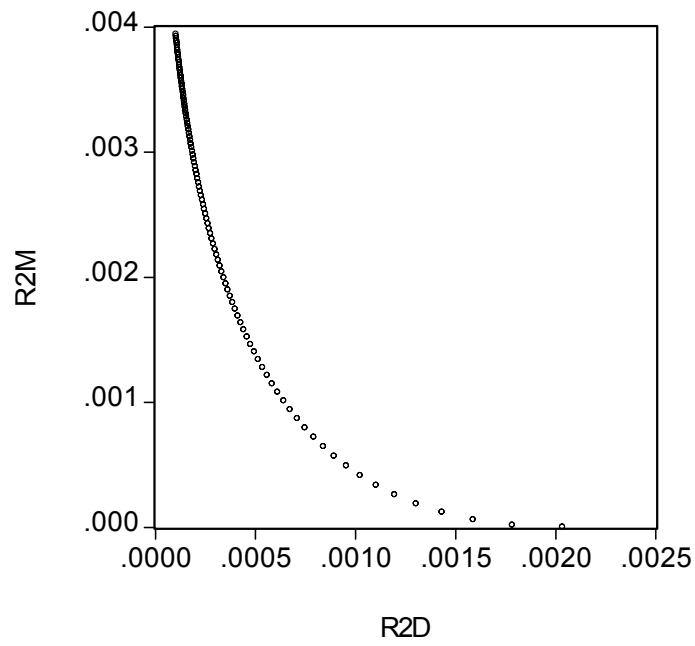
#### Modelo de Curva de Phillips



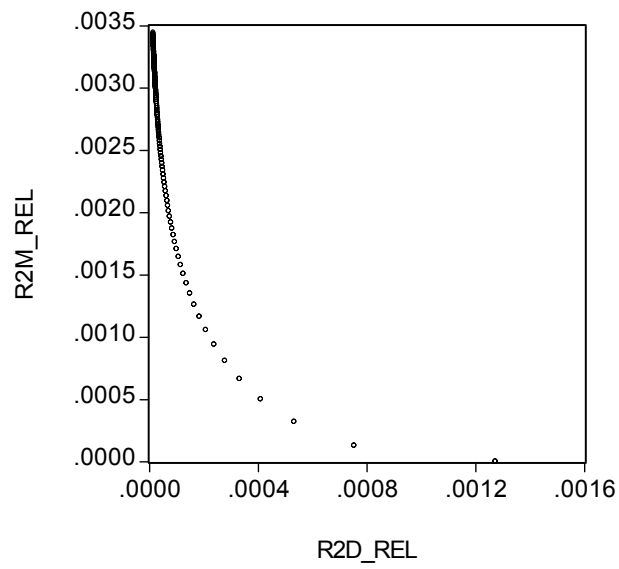
#### Modelo P\* Modificado (M1)



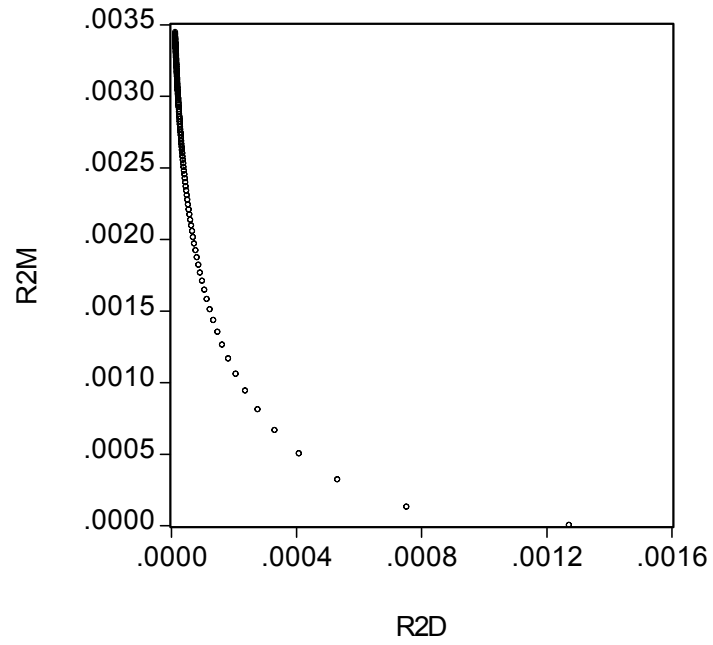
**Modelo P\* Modificado (M1A)**



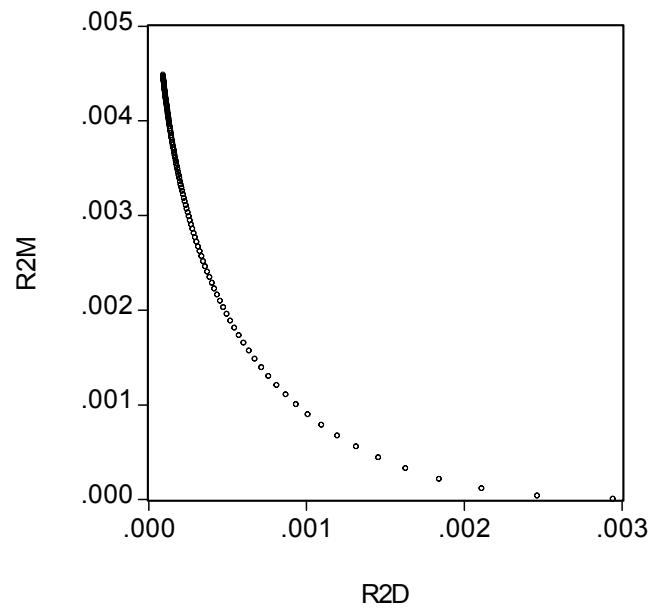
**Modelo Precio Relativo de Alimentos**



### Modelo Precio Relativo de los Alimentos



### Modelo Escandinavo



## Anexo 5<sup>30</sup>

### MEDIDAS DE EVALUACIÓN DE PRONÓSTICO

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |(\hat{y}_t - y_t)|$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right|$$

$$U - THEIL = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - y_{t-1})^2}}$$

donde:

n es el número de observaciones consideradas

$\hat{y}_t$  valor estimado por el modelo

---

<sup>30</sup> Véanse, Pindyck y Rubinfeld, (1997) y Makridakis y Wheelwright (1989).