Banco de la República

Subgerencia Monetaria y de Reservas

La curva Spot (Cero Cupón)
Estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos *

Realizado por:

Juan Manuel Julio
Silvia Juliana Mera
Alejandro Revéiz Hérault

Bogotá, Mayo de 2002

* Este es un documento de trabajo para discusión y no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva. Las opiniones expresadas y cualquier error u omisión son responsabilidad de los autores. Los algoritmos y programas adjuntos son únicamente de carácter académico y los autores no se responsabilizan de las consecuencias de su utilización.

Resumen

En este artículo se discute la importancia de la curva spot (cero cupón), así como las consideraciones que deben realizarse para escoger un conjunto de métodos de estimación que suplan las múltiples necesidades a las que se enfrenta un inversionista o especulador – valoración de activos y de productos contingentes, medición de riesgo, análisis multifactoriales de la curva de rendimientos, etc. Adicionalmente, se presenta una metodología de estimación basada en splines cúbicos suavizados, con validación cruzada, con la cual se estima la curva spot de los Tes B tasa fija. Esta estimación es posteriormente utilizada para ilustrar los problemas que pueden surgir al estimar curvas spot , con cualquier metodología, en un mercado ineficiente en términos de arbitraje, así como para estimar los Key Rate Durations – una descomposición lineal por tramos de la curva de la duración efectiva - para títulos específicos o portafolios de bonos. Esto con el fin de mostrar cómo movimientos no paralelos de la curva, cambios en la pendiente o en la curvatura, pueden afectar portafolios con la misma duración. En la última sección se presentan las conclusiones, haciendo énfasis principalmente en el hecho de que las herramientas que surgen de la estimación de esta curva y la sofisticación de los mercados financieros han llevado a las instituciones financieras y los inversionistas institucionales de tamaño importante a nivel global a modificar su proceso de toma de decisiones, trabajando en base a un presupuesto de riesgo definido por los niveles más altos de las instituciones que es distribuido selectivamente por tipos de riesgo tales como riesgo de tasa de interés, crediticio o de prepago entre otros.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

1. Introducción

En los últimos años el mercado de deuda pública en Colombia ha tenido un crecimiento acelerado. Es así, como en el Sistema Electrónico de Negociación -SEN- del Banco de la República, la negociación secundaria de títulos de deuda pública en enero del año 2002, alcanzó un volumen transado de alrededor de $14 billones en más de 8 mil operaciones, el nivel más alto en la historia del sistema y que representa un aumento de casi 800% con relación al mismo mes del año anterior. Por otro lado, es sorprendente que a pesar de la profundidad de este mercado, y los niveles actuales de tasas de interés, la toma de posiciones cortas en títulos de tasa fija por parte de los agentes es limitada y la rotación de posiciones se concentre generalmente en la emisión *On-The-Run*, es decir la que sigue abierta por parte del Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

A nivel del micro-mercado, ocurren varios fenómenos que resultan de interés. Por ejemplo, aplanamientos en la curva a muy largo plazo que podrían resultar de incrementos significativos del premio de convexidad de los títulos a mayor plazo, o bien de un exceso de demanda a largo plazo o, más extraño aún, del hecho que el mercado en algunas instancias no considere que deba cobrarse un premio por alargamientos en la duración de los títulos en la curva.

La ocurrencia de estos movimientos en la curva podría reflejar la imposibilidad práctica, o bien la carencia de incentivos, para construir posiciones de arbitraje para aprovechar las ineficiencias del mercado. La dificultad para tomar posiciones cortas en el mercado imposibilita construir sintéticos para aprovechar estos arbitrajes y llevar el mercado al equilibrio. Las posiciones cortas, manejadas en forma prudente, permiten por un lado la gestión del riesgo por parte de las entidades expuestas a riesgos tan diversos como de tasas de interés o de quiebra, y por otro lado aumentan la eficiencia del mercado al asegurar el equilibrio, tanto intra mercados como entre estos.

Este documento tiene varios objetivos. En primer lugar, en la segunda sección se introducen las distintas curvas de rendimiento – yields, spot (cero cupón) y forward – con las que se transa o se analiza el mercado. En la tercera parte se analizan los desplazamientos y movimientos típicos de las curvas de rendimientos La sección 4 presenta la estimación de la curva cero cupón (Curva Spot) para Colombia con la metodología de Fisher, Nychka y Zervos (1995) y discute las dificultades implícitas en las estimación de un modelo como este. Cabe resaltar que esta es una de las tantas metodologías existentes y su escogencia para este ejercicio específico no obedece a comparaciones técnicas que nos lleven a preferirla sobre otras metodologías sino únicamente al hecho de que minimiza los supuestos exógenos que deben efectuarse para la estimación de la curva, provee mayor flexibilidad para ajustarse a formas atípicas de la curva y permite trabajar con una muestra de pocos bonos, situación común en el mercado colombiano de deuda pública.

La sección 5 presenta una metodología de medición de riesgo - Key Rate Durations - que extiende el concepto de duración y convexidad a movimientos no paralelos de la curva y a activos con opcionalidades implícitas. Así mismo, a partir de la estimación de la curva spot – y para títulos TES B tasa fija específicamente - se ilustra la utilidad de estas Key Rate Durations para portafolios de misma duración pero con exposición a diferentes sectores de la curva de rendimientos. La sección 6 presenta las conclusiones.

2. La Estructura de Plazos

2.1. Definiciones

La estructura de plazos de las tasas de interés está relacionada con un conjunto de conceptos en finanzas. En términos prácticos esta es la relación entre los rendimientos al vencimiento de bonos distintos (de la misma calidad crediticia con diferente maduración) y su vencimiento. Sin embargo, también relacionada con otros conceptos como las curvas cero-cupón, de descuento y forward. En esta sección describimos brevemente estos conceptos.

Suponga que se posee un bono con cupones que en el periodo de transacción t su tiempo al vencimiento es de m años y que en cada uno de estos $k = 1,2,3,\ldots,m$ años, el bono paga cupones de c pesos y un principal de \$100 al vencimiento. Si se vende este papel en el periodo t a un precio $P(t,t+m)$, el rendimiento a su madurez, $y(t,t+m)$, es la tasa que iguala este precio con el valor presente del título. Si se compone continuamente la tasa de interés, la relación entre el precio y el retorno a la madurez se expresa como

$$(1) \qquad P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{m} c \exp\left\{-\frac{y(t,t+m)}{100}k\right\} + 100\exp\left\{-\frac{y(t,t+m)}{100}m\right\}$$

Este rendimiento al vencimiento es una *característica del bono en su totalidad* y su finalidad primaria es la de facilitar la comparación [incompleta] del retorno esperado entre distintos activos financieros.

Convencionalmente las curvas que relacionan los rendimientos al vencimiento de bonos con cupones y su madurez se conocen como la estructura de plazos de las tasas de interés. Sin embargo, esta no es una descripción apropiada para comparar inversiones alternativas por distintas razones. Por una parte, en la ecuación 1 se está usando una tasa constante para traer a valor presente cada uno de los flujos cuando teóricamente estos se deberían traer a valor presente usando la tasa correspondiente del flujo, es decir usando una tasa *spot* (cero cupón). Por otra parte, si se tienen dos bonos con el mismo vencimiento, los rendimientos serán diferentes en tanto los cupones sean distintos, lo cual crea un sesgo de cupón en la curva. Estas dos razones hacen que la curva que relaciona los rendimientos al vencimiento y su vencimiento sea muy difícil de interpretar y de usar en la práctica, y sugiere que una descomposición de la estructura de plazos de las tasas de interés en bloques básicos más pequeños - las tasas *spot* o *forward* - son más adecuadas.

Suponga ahora que en el tiempo de transacción t se tiene un bono cero cupón que vence en el tiempo $T > t$ y con periodo al vencimiento $m = T - t$. Sea $i(t,t+m)$ la tasa de interés, *spot*, de este bono cero cupón, y sea

$$(2) \qquad d(t,T) = \exp\left\{-\frac{i(t,T)}{100}(T-t)\right\}$$

la función de descuento de este título, es decir su precio en el periodo t. Las tasas *spot* representan entonces la retorno promedio de una inversión desde t hasta $t+m$.

En contraste con los bonos con cupones, la tasa $i(t,t+m)$ es una característica de un flujo particular. El rendimiento al vencimiento del bono, $y(t,t+m)$ se puede escribir como un promedio ponderado de las tasas cero cupón $i(t,t+m)$

Un bono con cupones como el descrito anteriormente se puede descomponer en m bonos cero cupón, y su valor presente en el periodo t se puede obtener a partir de las tasas *spot* correspondientes a los diferentes flujos

$$(3) \qquad P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{m} c \exp\left\{-\frac{i(t,t+k)}{100}k\right\} + 100 \exp\left\{-\frac{i(t,t+k)}{100}m\right\}$$

que en términos de la función de descuento 2 se puede escribir como

$$(4) \qquad P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{m} cd(t,t+k) + 100d(t,t+m)$$

La estructura de plazos de tasas de interés se representa entonces como el gráfico de las tasas *spot* mencionadas para distintos periodos al vencimiento m.

Íntimamente relacionada con la *curva spot,* se encuentra el concepto de la curva *forward*. Las tasas *forward* implícitas corresponden a la tasa al vencimiento de un contrato a futuro pactado en el tiempo t (la fecha de negociación), de una inversión que inicia en el en el tiempo $t' > t$ (la fecha de inicio del contrato) y termina en el tiempo $T > t'$ (la fecha de vencimiento). La tasa de este contrato a futuro se puede calcular directamente de las tasas *spot* ya que este negocio es equivalente a vender un bono cero cupón en la fecha de inicio del contrato y comprar otro cero cupón con el mismo valor de mercado que madura en la fecha de vencimiento. La tasa *forward* se relaciona con la *spot* de acuerdo con la siguiente fórmula

$$(5) \qquad f(t,t',T) = \frac{(T-t)i(t,T) - (t'-t)i(t,t')}{T-t'}$$

La tasa *forward* de un año miden el retorno marginal del incremento en un año de la madurez del negocio. Como las tasas *spot* son el rendimiento promedio de una inversión entre t y

$t+m$, las tasas *spot* son entonces el promedio de tasas *forward* en el periodo de maduración de la inversión.

La tasa de interés *forward* instantánea es la tasa *forward* para un contrato a futuro con un periodo infinitesimal de inversión luego de la fecha de inicio del contrato y se define como el límite

$$(5) \qquad f(t,t') = \lim_{T \to t'} f(t,t',T)$$

En la práctica esta tasa se puede identificar con la tasa *overnight forward*, es decir la tasa con madurez de un día luego del inicio del contrato.

De forma similar se puede escribir la tasa forward de madurez finita como un promedio de las tasas forward instantáneas entre la fecha de inicio del contrato y la fecha de maduración

$$(6) \qquad f(t,t',T) = \frac{\int_{\tau=t'}^{T} f(t,\tau)d\tau}{T-t'} \quad ,$$

y la tasa *spot* en el periodo t con una madurez de T como el promedio de las tasas forward instantáneas entre el periodo de transacción y la madurez como

$$(7) \qquad i(t,T) = \frac{\int_{\tau=t}^{T} f(t,\tau)d\tau}{T-t'}$$

Finalmente, las tasas forward y *spot* se relacionan entre sí de acuerdo con la siguiente ecuación

$$(8) \qquad f(t,T) = i(t,T) + (T-t)\frac{\partial i(t,T)}{\partial T}$$

2.2. Determinantes de la Forma de la Curva de Rendimientos

En esta sección se describen las fuerzas económicas que explican la forma de la estructura de plazos de tasas de interés. Las principales influencias son las expectativas sobre las tasas de mercado, el riesgo de los bonos y sesgo por convexidad. Esta sección tiene dos partes; en la primera se describe el efecto que cada uno de estos factores tiene por separado sobre la curva y luego se describe el efecto combinado de los tres.

2.2.1. Expectativas Sobre las Tasas

La hipótesis de expectativas asevera que los bonos gubernamentales tienen el mismo retorno esperado en el corto plazo puesto que la búsqueda de mejores retornos por agentes adversos al riesgo remueve cualquier diferencial de retorno esperado entre bonos. Esta eliminación de los diferenciales del retorno esperados sucede cuando los bonos que tienen rendimientos más altos que la tasa de corto plazo se espera que tengan pérdidas de capital que contrarrestan el mayor rendimiento.

Cuando el mercado espera un incremento en los rendimientos de los bonos, la pendiente de la curva de rendimientos se vuelve positiva de tal forma que los incrementos en el rendimiento se compensan exactamente con las pérdidas de capital (debida al incremento esperado de los rendimientos) para los bonos de largo plazo. Es decir, si una inversionista cree que un bono de largo plazo va a reducir su valor debido al incremento en las tasas de interés, ella va a requerir un rendimiento inicial más grande como compensación por el incremento de la duración. De igual forma, si las expectativas son a la baja y el valor de los bonos sube, los bonos de largo plazo dan un rendimiento por debajo de la tasa de corto plazo haciendo que la curva tenga pendiente negativa.

Este análisis, de incremento esperado en rendimientos y baja en el valor de los títulos para igualar los rendimientos, se puede extender a combinaciones de bonos, incluyendo posiciones sobre la curva de rendimientos neutrales a la duración.

De la misma forma que las expectativas de incremento en los rendimientos influencian la pendiente de la curva en el valor presente, las expectativas sobre la curvatura de la curva en el futuro afectan la curvatura actual. Si el mercado espera que la curva se aplane, se necesita aumentar para *negative carry* de los bonos que se aplanan para balancear las pérdidas de capital, haciendo que la curva actual sea más cóncava. Si el mercado prevé que la curva no va a tener ningún cambio en nivel o pendiente de la curva futura, la curva actual va a ser horizontal. Si el mercado espera un incremento paralelo en la curva pero sin cambio de curvatura durante el año siguiente, la curva de hoy será linealmente creciente en función de la duración. Si el mercado espera incremento de tasas con aplanamiento de la curva, la curva de hoy será creciente y cóncava.

En resumen, en un mundo de perfecta certidumbre, las tasas forward implícitas en la curva spot serían idénticas a las tasas spot futuras. Aunque en la realidad esto no ocurra, las tasas forward implícitas son estimadores insesgados de las tasas futuras. Aparte de explicar la forma cóncava de la curva de rendimientos, esta teoría también explica la relativa estabilidad de los yields de largo plazo con relación a los de menor madurez. Debido a que las tasas de largo plazo son promedios de las tasas de corto plazo, los cambios en las tasas de largo plazo son a su vez promedios de los cambios en las tasas de corto plazo y de las tasas futuras esperadas de corto plazo.

Esta teoría tiene dos grandes debilidades. En primer lugar, supone que para los inversionistas todos los bonos son perfectos sustitutos y segundo supone que los inversionistas son neutrales al riesgo. Sin embargo, bajo incertidumbre, a mayor plazo al vencimiento del bono mayor es el riesgo de variaciones en el valor del principal. Esta debilidad es estudiada en la sección a través de la teoría de preferencia de liquidez o de premio de riesgo.

2.2.2. Prima de Riesgo de los Bonos

Esta teoría presumen que – ceteris paribus – inversionistas adversos al riesgos prefieren bonos de menor madurez. Con el fin de atraer a los inversionistas, los bonos de largo plazo deben incluir un premio sobre los títulos de menor plazo. Así, al contrario de la teoría de expectativas, la observación empírica ha confirmado que los retornos no son constantes sino que presentan variaciones a lo largo de la duración, las cuales tienen que ver como una prima de riesgo. Se define entonces la *prima de riesgo* de los bonos como la diferencia entre los retornos esperados en un periodo de un bono con la máxima duración observada y un bono libre de riesgo. Una prima de riesgo positiva hace que la curva tenga pendiente positiva. Sin embargo, varias teorías cuestionan la validez de los signos (+/-), determinantes y la constancia a lo largo del tiempo de la prima de riesgo.

Evidencia empírica acerca del efecto de la prima de riesgo sobre la curva se puede encontrar al observar que la curva es creciente a lo largo de una buena proporción de los periodos, lo cual parece indicar que la prima de riesgo sea positiva. Otra forma más directa de obtener evidencia acerca de la existencia y signo de la prima de riesgo es observando los retornos promedios históricos para distintas duraciones, como una Proxy de los retornos esperados de largo plazo.

La prima de riesgo teórica se puede estimar a partir de la diferencia entre las tasas de retorno anualizadas esperadas en diferentes puntos y el retorno anualizado del bono libre de riesgo en un plazo muy corto como un mes. La experiencia histórica de otros países sugiere que la prima de riesgo de los bonos no es lineal en duración, pero en el tramo inicial de la curva se incrementa muy rápido y mucho más lentamente después de algunos años. De igual forma, los estudios empíricos también sugieren que la prima de riesgo de los bonos no es constante sino que varía con el tiempo. Es decir, es posible identificar periodos en los que la prima de riesgo es inusualmente alta o baja. Las primas de riesgo altas se presentan luego de observar condiciones económicas desfavorables y las bajas luego de observar buenas condiciones económicas.

2.2.3. Teoría de Preferencia de Habitat

Esta teoría presume que los inversionistas institucionales, debido a la naturaleza de sus pasivos (fondos de pensiones por ejemplo) tienen una demanda predeterminada por títulos con vencimientos específicos. En realidad, estos inversionistas utilizan estrategias de inmunización – se intenta cubrir tanto riesgo de reinversión como de precio – al intentar igualar las características de riesgo de sus activos con las de sus pasivos. Estas pueden ser la duración, los *key rate durations* o la convexidad.

2.2.4. Sesgo por Convexidad

El sesgo por convexidad trata de explicar diferencias entre los rendimientos de bonos a distinta madurez. Distintos bonos presentan diferentes características de convexidad, y estas diferencias, a lo largo de distintas maduraciones, pueden dar lugar a diferencias de rendimiento (que se cancelan). En particular, un bono cero cupón de largo plazo presenta una convexidad muy grande, la cual tiende a reducir su rendimiento. El sesgo de convexidad se refiere al impacto que tienen las diferencias en convexidad sobre la curva de rendimientos.

La convexidad es una medida indicadora de la no linealidad en la relación existente entre los precios y los rendimientos. Todos los bonos con cupones tienen convexidad positiva y esto implica que sus precios se incrementan más debido a una baja en las tasas que lo que bajan por un incremento en la misma magnitud de estas. De esta forma, la convexidad es una característica deseable en los bonos ya que incrementa el retorno del bono (con respecto a un bono sin convexidad) sin importar la dirección en la que se muevan las tasas, siempre que estas se muevan. Como la convexidad siempre es benéfica para el valor de los bonos para un rendimiento fijo, la rentabilidad de los bonos con mayor convexidad tiende a ser inferior a la de bonos con convexidad inferior e igual madurez. Es decir, una inversionista exige menos retorno por un bono si tiene la expectativa de mejorar sus retornos vía convexidad. Los inversionistas se interesan principalmente del retorno esperado, y los bonos más convexos son los que pueden ofrecer un retorno esperado especifico a un rendimiento más bajo.

Ante la ausencia de arbitrajes - si no hay cambios esperados en las tasas - uno podría esperar que la curva *spot* fuese plana a un nivel dado. Sin embargo, esta se curva hacia abajo a una velocidad cada vez más alta dado que se requieren menores retornos para compensar la ventaja que ofrece la convexidad de bonos de larga duración, lo cual iguala los rendimientos en el corto plazo. Los bonos de corto plazo tienen menor convexidad y por lo tanto la curva tiene un sesgo de convexidad menor en duraciones bajas. Sin embargo, para duraciones altas la convexidad se vuelve muy importante. Esto ha permitido concluir que la convexidad puede ser una de las razones por las que la curva tiene una forma cóncava, es decir, la tendencia de la curva a aplanarse o invertirse para duraciones largas.

2.2.4. Efecto Conjunto de los Factores

La interpretación de forma de la curva de rendimientos es en general muy difícil debido a que todos los factores la influencian simultáneamente. Una curva con pendiente alta puede representar las expectativas al alza de las tasas o una prima de riesgo grande. Una curva muy jorobada (con alta curvatura) puede representar las expectativas de aplanamiento o las de alta volatilidad (que hace a la convexidad más valiosa), o la forma cóncava de la curva de prima de riesgos.

En teoría la curva de rendimientos se puede descomponer de acuerdo con los factores mencionados, pero en la práctica esto trabajo no es posible porque los efectos de los factores no son estables a lo largo del tiempo y no son observables sino estimados. Sin embargo, a partir de las estimaciones se han encontrado algunas conclusiones interesantes.

- La afirmación que las tasas forward revelan las expectativas del mercado son ciertas solamente si no existe prima de riesgo y el sesgo por convexidad es muy pequeño. Si el objetivo es inferir las expectativas sobre las tasas dos años adelante, el sesgo por convexidad es muy pequeño y se puede ignorar. Sin embargo, es necesario restarle a las tasas forward una estimación de la prima de riesgo para poder obtener una estimación de las expectativas. De otra forma estas expectativas van a ser fuertemente sesgadas hacia arriba.

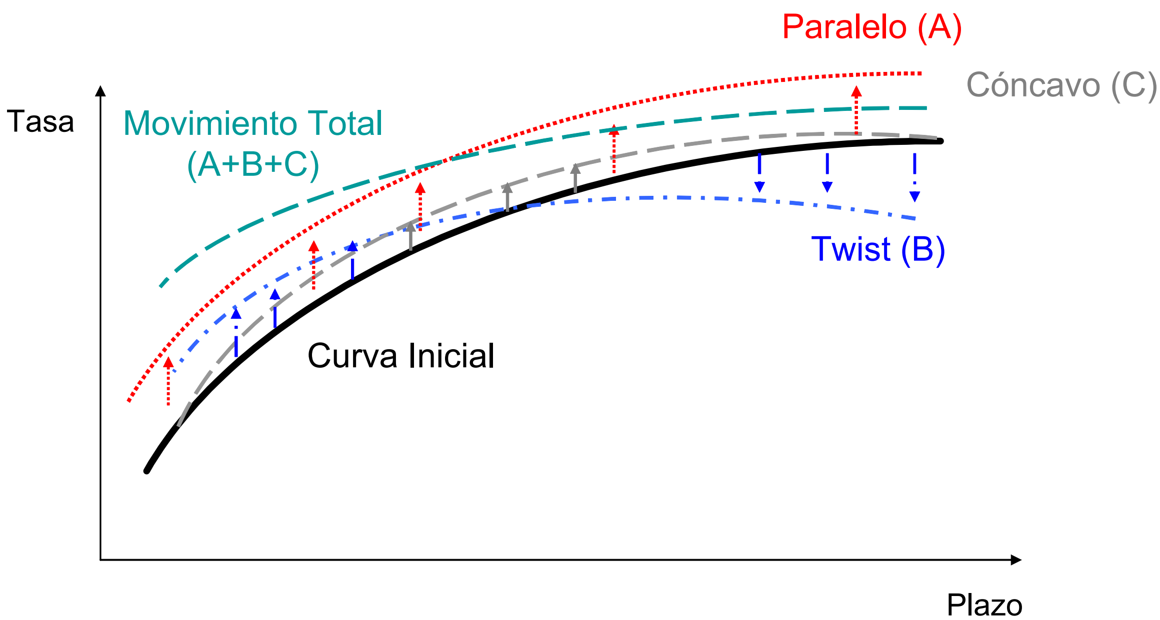
- Las teorías tradicionales sobre la curva de rendimientos que suponen una prima de riesgo nula o constante son inconsistentes con la información empírica. De acuerdo con la teoría de expectativas puras, el origen de la tendencia creciente de la curva debe predecir incrementos en las tasas de largo plazo, de tal forma que las perdidas de capital elimina la ventaja de corto plazo por efecto del incremento esperado de la tasas. Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que, en promedio, bajas discretas en las tasas de los bonos de largo plazo, que incrementan las ventajas de rendimiento de los bonos de largo plazo, siguen una tendencia creciente. Entre más empinada sea la curva de rendimientos, más grande la prima de riesgo. Este resultado viola claramente la hipótesis de expectativas puras y apoya la de primas de riesgo variables en el tiempo.

- Las teorías más recientes de la estructura de plazos hacen supuestos menos exigentes que las teorías descritas anteriormente. Sin embargo, muchas de las teorías uni-factoriales hacen el supuesto de que los bonos con la misma duración tienen el mismo retorno esperado. Esto implica que las posiciones neutrales en duración con más o menos convexidad obtienen siempre el mismo retorno esperado (porque la desventaja en rendimiento se equilibra con la ventaja en convexidad). Sin embargo, si los mercados valoran cobran demasiado la convexidad positiva, las posiciones más convexas resultan obteniendo menores retornos.

3. Desplazamientos de la curva de rendimientos

Tradicionalmente, la decisión de un inversionista en títulos de renta fija se limitaba a la escogencia de una duración. Sin embargo, esta medida de exposición a movimientos en la curva de rendimientos no toma en consideración cambios en la pendiente (*twists*) o en el grado de concavidad (*butterfly*) de la curva – únicamente considera el impacto de movimientos paralelos de la curva de rendimientos.

Figura 1 – Movimientos Típicos de la curva de rendimientos



La figura 1 ilustra los tres tipos de movimientos – cambios en la pendiente, en la curvatura y desplazamiento paralelo - y el movimiento resultante de su agregación. Se observa que tanto el *twist* como el *butterfly* pueden reforzar o compensar el movimiento paralelo de la curva. Estos movimientos de la curva no ocurren en forma independiente – están correlacionados.

Cabe resaltar que, al estudiar la exposición al riesgo de tasa de interés de un portafolio, deben ser analizadas las sensibilidades de este a cada uno de estos movimientos o factores ya que dos portafolios con la misma duración pueden tener sensibilidades distintas a cambios en la pendiente o en la curvatura, así como diferente convexidad. Una herramienta que permite esta estimación es el cálculo de los *partial durations* o de los *Key Rate Durations*, que puede entenderse, en forma intuitiva, como una desagregación de la duración efectiva del portafolio como función de TIRes o de tasas spot a distintos plazos respectivamente. En este documento se describe la forma de estimar los key rate durations. Sin embargo, antes de dar este paso es necesario estimar la curva spot (cero cupón). En la siguiente sección se presenta la metodología utilizada para este fin.

4. Estimación de la Estructura de Plazos

La estimación de la curva de rendimientos se puede llevar a cabo por bootstrapping o especificando el comportamiento de la curva de descuentos, la curva forward o la de rendimientos.

El primer procedimiento se basa en la estimación de puntos particulares de la curva con base en el principio de que la curva debe estar libre de arbitraje. Posteriormente estos puntos se pueden suavizar con el fin de obtener valores estimados de la curva a diferentes vencimientos. El segundo procedimiento se basa en la parametrización del comportamiento de alguna de las curvas. Entre muchas otras alternativas se ha propuesto el uso de splines cúbicos (Mc Culloch (1971) y (1975) y Shea (1984), B-splines, Polinomios de Chebychev, Polinomios de Bernstein, Polinomios de Laguerre (Nelson y Siegel(1988)), splines polinomiales, splines exponenciales (Vasicek y Fong (1982)) y polinomios generales (Chambers et al. (1984)).

Estas especificaciones dependen de un vector de k parámetros desconocidos, $\boldsymbol{\theta}_{k\times 1}$, que han de ser estimados con base en la información disponible de precios o TIRes de las transacciones de bonos realizadas en un periodo particular.

La estimación de los valores en $\boldsymbol{\theta}$ se realiza ya sea por mínimos cuadrados lineales o no lineales o por máxima verosimilitud con algún supuesto distribucional sobre las diferencias entre los precios observados de los bonos y los estimados a partir de valores particulares de los parámetros en $\boldsymbol{\theta}$.

En esta sección describimos los dos enfoques para la estimación, arbitraje y parametrización de curvas en su orden.

4.1. Bootstrapping

Los inversionistas no pueden observar directamente la estructura de tasas spot. En general se tienen las TIRes para los títulos que se transan en el mercado y a partir de estas, la curva spot (cero cupón) debe ser derivada. Existen técnicas elaboradas para realizar esta estimación como se muestra en la siguiente sección pero también puede acercarse el problema con herramientas sencillas como el bootstrapping. Este consiste en construir una curva cero cupón libre de arbitraje. El procedimiento consiste en hallar secuencialmente - a lo largo de las fechas de vencimiento - las tasas cero cupón para títulos con distintos vencimientos. Un bono puede ser descompuesto en un conjunto de bonos a descuento que corresponden tanto a los intereses como al principal. Así, el precio del bono es la suma de los precios de los bonos a descuento. Si existen cotizaciones en el mercado a todos los plazos de la curva de rendimientos, la curva spot puede estimarse a partir de estas utilizando el siguiente procedimiento:

- La tasa spot de un periodo es igual al yield de un bono a un período.
- Utilizando la tasa spot a un año, se descuenta el primer cupón de un bono con vencimiento a 2 periodos: Substrayendo este valor presente del primer cupón del precio de mercado del bono a dos periodos, se obtiene el valor de mercado (precio) de la suma del principal y del cupón que se pagan en el segundo periodo. Dado este

valor, es posible calcular la tasa de descuento que iguala el valor presente al valor de mercado mencionado anteriormente. Esta es la tasa spot de 2 periodos.

- Se repite el proceso de la misma manera para determinar secuencialmente las tasas spot para todos los plazos.

El procedimiento produce las tasas cero cupón para las los distintos vencimientos de cada bono, las cuales se pueden interpolar o suavizar para lograr una mejor descripción de la curva.

La ventaja principal del método de bootstrapping es, precisamente, que la curva cero cupón derivada esta libre de arbitraje para el conjunto de bonos utilizados.

4.2. Procedimiento Para la Estimación de La Curva cero Cupón a Través de Splines Cúbicos Suavizados

La estimación de la curva cero cupón se realiza parametrizando la curva forward con splines cúbicos cuyos nodos se localizan en las fechas de los cupones de cada uno de los bonos de la muestra. De esta manera se obtiene una representación sobre-parametrizada de la curva de descuento. Se obtiene una representación parsimoniosa de la curva cero cupón al incluir una penalización que reduce la dimensión efectiva del espacio de parámetros. Una de las muchas ventajas de esta metodología es que la penalización (y por lo tanto la dimensión del espacio de parámetros) se controla a través de un único parámetro. En esta sección se describe primero el significado de spline cúbico, luego se muestra el procedimiento de estimación sin incluir la penalización y luego incluyéndola, y finalmente se presenta la estimación del parámetro de suavización por validación generalizada cruzada.

4.2.1. Splines

La idea de construir un spline es hallar una aproximación al comportamiento de una función desconocida de la cual sólo se conoce un conjunto de puntos. En nuestro caso esta función, $h(\tau)$, se puede escribir en términos de la curva de descuentos, $d(t,\tau)$ descrita en la ecuación 2, cuyo dominio es el intervalo $[0, T-t]$, donde t es el periodo de transacción y T es la fecha de vencimiento del bono más largo en la muestra. Por ejemplo, la curva cero cupón se puede obtener como $i(t,t+\tau) = -100\dfrac{\ln(d(t,t+\tau))}{\tau}$, la curva forward instantánea, $f(t,t+\tau) = -\dfrac{\partial d(t,t+\tau)}{\partial \tau}$, etc. También se podría estar interesado en $l(\tau) = -\ln(d(t,t+\tau))$.

De acuerdo con Fisher, Nychka y Zervos(1994), los mejores resultados en términos de precisión y sesgo se obtienen cuando se toma $h(\tau) = f(t,t+\tau)$, es decir cuando se aproxima la curva forward.

La única restricción necesaria para la estimación de la curva cero cupón a partir de la aproximación por splines de una función arbitraria $h(\tau)$ es que exista una transformación g tal que

$$g(h(\tau),\tau) = d(t,t+\tau)$$

Los splines cúbicos son un conjunto de polinomios definidos por intervalos que sirven para aproximar el comportamiento de la función $h(\tau)$. Los límites de los intervalos, s_i se conocen como los nodos, y cumplen con la propiedad de que $s_1 = 0$ y $s_K = T - t$. Es decir parten el dominio de la función en $K-1$ intervalos.

Más propiamente, un spline cúbico con nodos $s_1, s_2, \ldots, s_K$ se define a partir de un conjunto de polinomios de la forma

$$f(\tau) = a_i + b_i\tau + c_i\tau^2 + d_i\tau^3 \qquad\qquad s_i \le \tau < s_{i+1}$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}
a_{i-1} + b_{i-1}s_i + c_{i-1}s_i^{\,2} + d_{i-1}s_i^{\,3} &= a_i + b_i s_i + c_i s_i^{\,2} + d_i s_i^{\,3} \\
b_{i-1} + 2c_{i-1}s_i + 3d_{i-1}s_i^{\,2} &= b_i + 2c_i s_i + 3d_i s_i^{\,2} \\
2c_{i-1} + 6d_{i-1}s_i &= 2c_i + 6d_i s_i \\
c_0 = d_0 &= c_n = d_n = 0
\end{aligned}$$

Las tres primeras restricciones aseguran que la función, su primera y segunda derivada son continuas en los nodos. La restricción final significa que el spline cúbico es lineal en el punto inicial y final de la muestra. Sin embargo, vale la pena notar que el spline cúbico tiene tercera derivada discontinua en los nodos:

$$f'''(\tau) = d_i \qquad para \quad s_i \leq \tau < s_{i+1}$$

El spline cúbico tiene la propiedad de que es una función de interpolación que minimiza la integral de la segunda derivada al cuadrado, $\int_{s_0}^{s_K} \left(f''(\tau) \right)^2 d\tau$. Este término se puede interpretar como una penalización por rugosidad de la función. Curvas que cambian lenta o suavemente presentan un valor pequeño de la integral (por ejemplo, en una función lineal la integral toma valor cero).

Sin embargo, si se tienen datos con mucho ruido, no tiene mucho sentido la interpolación de los datos ya que la varianza de los valores interpolados va a ser muy grande. En este caso, es preferible una curva más suave que no interpole los datos pero que reduzca el componente de ruido a la vez que minimice la suma de cuadrados de los residuos. Esto es, un spline de suavizamiento.

Otra característica de los splines es que con la adición de un nodo sólo se aumenta la dimensionalidad del espacio de parámetros en una unidad ya que tres de los cuatro parámetros están restringidos. De igual forma, al incrementar el número de nodos, los splines toman formas funcionales cada vez más flexibles, lo cual muestra la relación entre el grado de aproximación que se logra con el spline y el número de nodos que lo definen.

Una manera eficiente y numéricamente estable para generar los splines necesarios para aproximar una función genérica, $h(\tau)$, es a través de las bases de B-splines cúbicos.

4.2.2. Bases de B-splines Cúbicos

Sean $s_1, s_2, ..., s_K$ los nodos de un spline tales que $s_i < s_{i+1}$, supongamos $s_1 = 0$ y $s_K = T - t$, la máxima madurez de los bonos de la muestra. Los nodos definen $K-1$ intervalos en el dominio del spline, $[0, T-t]$.

Con el propósito de definir una base de B-splines, es conveniente definir un conjunto ampliado de nodos, $\{d_k\}_{k=1}^{K+6}$ tales que $d_1 = d_2 = d_3 = s_1$, $d_{K+4} = d_{K+5} = d_{K+6} = s_K$ y $d_{k+3} = s_k$ para $k = 1,2,3,...,K$.

Una base de un B-spline cúbico es un vector de $\kappa = K + 2$ B-splines cúbicos definidos sobre el dominio. Un B-spline se define a partir de la siguiente recursión, donde $r = 4$ para un spline cúbico y $1 \le k \le \kappa$

$$\phi_k^{\,r}(\tau) = \frac{\phi_k^{\,r-1}(\tau)(\tau - d_k)}{d_{k+r-1} - d_k} + \frac{\phi_{k+1}^{\,r-1}(\tau)(d_{k+r} - \tau)}{d_{k+r} - d_{k+1}}$$

para $\tau \in [0, T-t]$, donde

$$\phi_k^{\,1}(\tau) = \begin{cases} 1, & d_k \le \tau < d_{k+1} \\ 0, & En \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

Para simplificar la notación, sea $\phi_k^{\,4}(\tau) = \phi_k(\tau)$. La base de un B-spline es entonces el vector columna

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = (\phi_1(\tau), \phi_2(\tau), ..., \phi_\kappa(\tau))$$

Cualquier spline cúbico se puede construir a partir de combinaciones lineales de los B-splines, $\boldsymbol{\varphi}(\tau)\boldsymbol{\beta}$, donde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\kappa)^T$ es un vector de κ coeficientes.

Tal como está escrita la fórmula para la base del B-spline, esta es una función vectorial de un único parámetro escalar $0 \leq \tau \leq T - t$.

4.2.3. Estimación sin Penalización: Splines de Regresión

Lo primero que vamos a hacer es parametrizar la función $h(\tau)$ con un spline,

$$h_s(\tau, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_k \phi_k(\tau) = \boldsymbol{\varphi}(\tau)\boldsymbol{\beta}$$

y de la ecuación se obtiene la función de descuento parametrizada en términos del spline

$$d_s(t, t+\tau, \boldsymbol{\beta}) = g(h_s(., \boldsymbol{\beta}), \tau)$$

y se encuentra entonces el valor presente del bono i-ésimo de la muestra, de acuerdo con esta función de descuento como

$$P_i(t, t+T, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{c}_i^{\,T} \mathbf{d}_a(t, t+\tau_i, \boldsymbol{\beta})$$

donde $c_i^{\,T} = [c_i, c_i, c_i, ..., c_i + 100]^T$ es el vector que contiene los flujos restantes del bono i-ésimo y $\mathbf{d}_s(t, t+\tau_i, \boldsymbol{\beta})^T = [d_s(t, t+\tau_1, \boldsymbol{\beta}), d_s(t, t+\tau_2, \boldsymbol{\beta}), ..., d_s(t, t+\tau_K, \boldsymbol{\beta})]$ es el vector que contiene los valores de la función de descuento para cada uno de los vencimientos del bono i-ésimo.

Sea $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta})$ el vector que contiene los precios de los bonos en la muestra parametrizados por el spline, y sea $\mathbf{P}$ el vector que contiene los precios observados de los mismos bonos. Por lo tanto, $h_s(\tau, \boldsymbol{\beta}^*)$ es el spline de regresión donde $\boldsymbol{\beta}^*$ es el valor de los parámetros que resuelve

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \left[(\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta}))^T (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta})) \right]$$

es decir, que minimiza la suma de cuadrados de la diferencia entre los precios observados y los parametrizados por el spline de regresión.

Siguiendo procedimientos estándar en la estimación de mínimos cuadrados no lineales, (Véase Chow(1983)), se encuentra la siguiente fórmula recursiva para el estimador del vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{\beta}^1 = \left(\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^0)^{\mathbf{T}}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^0)\right)^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^0)^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}(\boldsymbol{\beta}^0)$$

donde $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^0) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^0}$ y $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\beta}^0) = \mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta}^0) + \boldsymbol{\beta}^0\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^0)$

Podemos iterar esta última ecuación, y la solución es el punto fijo

$$\left(\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^*)^{\mathbf{T}}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^*)\right)^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^*)^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}(\boldsymbol{\beta}^*)$$

4.2.4. Estimación con Penalización: Splines de Suavizamiento

En la estimación de los parámetros de un spline de regresión, el número de parámetros está determinado por el número de nodos involucrados. Si se toman muchos o pocos nodos se pueden obtener estimaciones pobres. En este trabajo se propone sobreparametrizar el spline incrementando el número de nodos pero penalizar la variabilidad de la función estimada de descuentos. La inclusión de esta penalización reduce la dimensión del espacio de parámetros ya que forza relaciones implícitas entre los parámetros del spline. Se define la penalización como

$$\lambda \int_o^{T-t} \left(h''(\tau)\right)^2 d\tau$$

es decir, una constante por la integral de la segunda derivada de la función a aproximar al cuadrado. Supongamos por el momento que λ es fijo, entonces nuestro problema es minimizar la suma de residuos al cuadrado,

$$\min_{h(\tau)\in\aleph}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\left(t,t+\tau_i\right)-c_i\tilde{g}\left(h(.),\tau_i\right)\right)+\lambda\int_o^{T-t}\left(h''(\tau)\right)^2 d\tau\right]$$

donde $\aleph$ es el conjunto de todas las funciones definidas sobre R^+ con segundas derivadas al cuadrado que integran a un valor finito.

En términos del spline, $h_s(\tau,\boldsymbol{\beta})$, se puede escribir la penalización como

$$\lambda\int_0^{T-t}\left(\frac{\partial h_s(\tau,\boldsymbol{\beta})}{\partial\tau^2}\right)d\tau=\lambda\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T-t}}\boldsymbol{\varphi}''(\boldsymbol{\tau})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varphi}''(\boldsymbol{\tau})\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}\right)\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{\beta}$$

donde $\mathbf{H}$ es una matriz $\kappa\times\kappa$ con una banda diagonal debido a la estructura de la base del B-spline. Esta matriz está completamente determinada por los nodos del spline, y como cualquier función lineal en τ no se penaliza, la matriz tiene algunos valores propios cero.

El problema de minimización se puede escribir, para un λ dado

$$\min_{\boldsymbol{\beta}(\lambda)}\left[\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta}(\lambda))\right)^T\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta}(\lambda))\right)+\lambda\boldsymbol{\beta}(\lambda)^T\mathbf{H}\boldsymbol{\beta}(\lambda)\right]$$

de nuevo el minimizador se puede encontrar con las técnicas de estimación de mínimos cuadrados no lineales iterando sobre

$$\boldsymbol{\beta}(\lambda)^{i+1}=\left(\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}(\lambda)^i\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}(\lambda)^i\right)+\lambda\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}(\lambda)^i\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}\left(\boldsymbol{\beta}(\lambda)^i\right)$$

hasta que converja a un punto fijo

$$\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)=\left(\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)+\lambda\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)$$

El spline de suavizamiento es entonces $h_s\left(\tau,\beta^*(\lambda)\right)$

Formalmente, nuestro estimador se puede escribir como el de una regresión "*ridge*". La penalización por rugosidad del spline tiende a hacer que $\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)$ sea casi no singular, y entonces usa la penalización para reducir la dimensionalidad del número de parámetros. La penalización, en consecuencia, resuelve el problema de la multicolinealidad. La ventaja de este enfoque es que la penalización se controla a través de un único parámetro λ.

4.2.5. Validación Cruzada Generalizada

En esta sección describimos un criterio para la adecuada estimación del parámetro λ. Seleccionamos el valor de λ que minimiza el valor de la estadística de "validación cruzada generalizada"

$$\gamma(\lambda) = \frac{\left((\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda))\mathbf{Y}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)\right)^T \left((\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda))\mathbf{Y}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)\right)}{\left(n - \theta \operatorname{tr}(\mathbf{A}(\lambda))\right)^2}$$

donde

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)\left(\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)^T + \lambda\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)\right)^T$$

La traza de esta matriz es una medida del número efectivo de parámetros. El parámetro θ se suele llamar el "costo" y controla el balance entre la bondad de ajuste y la parsimonia. En general θ se fija en la unidad, pero puede incrementarse para reducir la señal que se extrae, haciendo de paso que el spline sea más rígido.

Para cada nuevo valor de λ debemos hallar el nuevo $\boldsymbol{\beta}^*(\lambda)$ y con este el nuevo $\gamma(\lambda)$ que se pueden minimizar directamente.

4.3. Algunos Comentarios y Aplicaciones de la Curva Spot

4.3.1. Comentarios y Consideraciones

La literatura y los participantes del mercado han desarrollado una cantidad importante de métodos de estimación de la curva spot (cero cupón). Como se mencionó anteriormente, la estimación de la estructura a término de las tasas de interés se realiza en tres pasos. En primer lugar se determina una función que relacione precios a las tasas de descuento. Luego, se escoge una forma funcional (polinomios, splines, etc.) para aproximar la función de descuento y finalmente se utiliza un método econométrico para estimar los parámetros de la función de descuento (e.j. splines cúbicos estimados con mínimos cuadrados ordinarios).

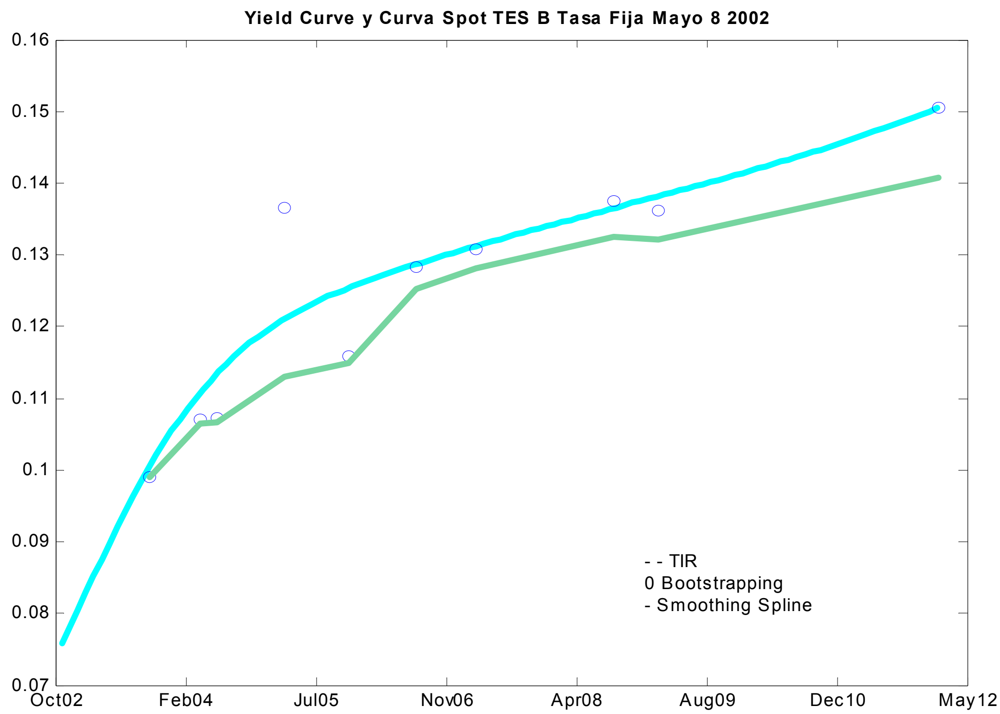
En cada una de estas etapas es necesario realizar supuestos o imponer restricciones a partir de las cuales surgen "modelos" o estimaciones distintas ya que todas estas decisiones afectan la estimación obtenida para la curva de rendimientos. Así, el estudio de la conveniencia de un modelo resulta en una evaluación conjunta de la hipótesis implícita en el modelo, la ecuación de precios escogida y el método de estimación. En adelante cuando hablamos de "método de estimación" nos referimos a la combinación de la función de aproximación y la técnica de estimación asociada.

Sin embargo, la utilidad de cualquier método de estimación está limitada de-facto por la eficiencia del mercado. En efecto, si los precios de los bonos en la muestra permiten arbitrajes – así estos sean teóricos – el impacto en el método de estimación vía las limitaciones de las funciones de aproximación en términos de flexibilidad para replicar formas extrañas de la curva (e.j. polinomios) o vía el método econométrico (e.j. mínimos cuadrados para estimar los parámetros de un spline) pueden resultar significativos.

Como ilustración de este fenómeno, la figura 2 presenta los resultados del método de estimación presentado anteriormente en esta sección para el 8 de Mayo de 2002, día en que la curva de TIRES tenía una curvatura atípica en el sector intermedio.

Se observa que el método de estimación aumenta el nivel para los flujos cercanos a 2005 para compensar por las mayores tasas en el sector entre 2006 y 2008 de la curva de TIRes. Adicionalmente, para aproximar los precios de los bonos con plazos menores a 2005, el método econométrico genera tasas spot muy bajas entre Octubre del 2002 y Febrero del 2004. De esta manera, tomar decisiones de "trading de curva" sobre esta estimación no parece adecuado ya que como lo muestra la curva de TIRes el arbitraje se podría efectuar comprando un portafolio de bonos en el sector intermedio de la curva y tomando posiciones cortas en bonos que componen un portafolio con la misma duración pero compuesto una combinación de títulos de corto y largo plazo – un *Barbell*.

Figura 2 - Curva de TIRes, Curva spot (Cero Cupón) Estimada y Bootstrapping TES B tasa fija para Mayo 8 de 2002



En resumen, la estimación de la curva spot, para ser precisa, debe efectuarse sobre un conjunto de títulos que no permitan arbitrajes entre estos, es decir en un mercado donde se transen todos los plazos y en el cual se puedan tomar posiciones cortas para tomar provecho de cualquier oportunidad de arbitraje.

Adicionalmente, si tenemos un mercado arbitrado, la precisión de un método de estimación está estrechamente ligada a los supuestos y restricciones impuestas. Claramente, la ventaja de un método de estimación no puede ser evaluada únicamente en forma econométrica a partir de indicadores como el error cuadrático medio, sino que la conveniencia de un método sobre otro está condicionada por el uso que se le quiera dar a la curva. En efecto, para valoración quizás preferimos que el error entre los precios estimados y observados de los títulos utilizados para la estimación sea mínimo. Sin embargo, debe verificarse que este método también aproxime correctamente el precio de títulos que no se incluyeron en la muestra a plazos distribuidos en todo el dominio de vencimientos.

Por otro lado, si deseamos utilizar la estimación para crear sistemas de medición de riesgo, favoreceremos métodos de estimación que no incluyan sesgo en la volatilidad de las tasa. Así mismo, si deseamos calibrar modelos de evolución de tasas de interés para valorar derivados, buscaremos el método de estimación que provea precios representativos de las relaciones (de arbitraje o no arbitraje) entre distintos bonos existentes en el mercado. Es así como la variedad de necesidades explican la multiplicidad de funciones de aproximación y métodos estadísticos de estimación de los parámetros y ex-ante es inadecuado descartar métodos de estimación a menos que los supuestos y restricciones nos permitan deducir que el resultado no cumple nuestras expectativas.

En el caso particular de Colombia, es importante tener en cuenta que cualquier estudio econométrico de la curva de rendimientos está limitado por la mala calidad de la muestra, tanto en el tamaño de la muestra como en la carencia de una curva de TIRes arbitrada. En términos reales, el único mecanismo de validación para un método de estimación es su utilización y verificación activa en el mercado - o bien en trading, en arbitraje, en riesgo o en *pricing*. Más aún, un método de estimación puede funcionar durante un período de tiempo y proveer altas utilidades, pero a medida que otros participantes comienzan a utilizarlo pierde su eficiencia. Sin embargo, esto no debería desalentarnos en la construcción y evaluación de nuevos métodos de estimación de la curva spot (cero cupón) ya que en ese momento, otro modelo puede ser más útil. Más aún, la curva spot tiene múltiples aplicaciones que por ejemplo permiten desarrollar nuevos mercados – derivados, riesgo crediticio, etc. – o medir el riesgo al que se expone una entidad en forma mucho más precisa.

4.3.2. Algunas aplicaciones de la curva spot

La curva spot – y las tasas forward que se deducen de esta – tiene aplicaciones ilimitadas. En efecto, son la base de los sistemas de riesgo actuales, por ejemplo riskmetrics de J.P. Morgan o multifactor duration. Así mismo, son utilizadas para determinar si un instrumento financiero está sub o sobre valuado (*rich and cheap analysis*) o para calibrar los modelos de evolución de la tasas de interés con los cuales se valoran los derivados sobre tasas de interés. Por otro lado, permiten estudiar que factores afectan la curva de rendimientos y descomponer sus movimientos. Estos modelos permiten realizar una medición específica de riesgo (por factores) y realizar una atribución de desempeño por una toma selectiva de riesgo.

Adicionalmente, los precios de activos diferentes a los títulos emitidos por la nación pueden ser cotizados como un spread sobre la curva de rendimientos - de TIRes o spot.

Un ejemplo de utilización de las tasas spot, es la estimación de los key rate durations, combinados con escenarios de movimientos de la curva spot para estudiar el impacto de desplazamientos de toda índole de la curva. Esta aplicación se ilustra a continuación.

5. Estimación de los *key rate durations*

5.1. Introducción de los Key Rate Durations

Movimientos en la curva de rendimientos afectan cada bono en forma distinta. En efecto, bonos sin cupones (Zeros) responden únicamente a movimientos en las tasas de interés cercanas a su vencimiento, mientras que bonos con cupones están expuestos a movimientos en todos los puntos de la curva. Así mismo, las opciones implícitas en bonos corporativos o titularizaciones son sensibles a cualquier movimiento en la curva. La compresión de la exposición al riesgo de tasas de interés, les permite a los inversionistas identificar apuestas a movimientos de la curva y medir los consecuentes riesgos.

La medida más común para medir la exposición al riesgo de tasa de interés para instrumentos financieros contingentes (e.g. bonos con opcionalidades implícitas) es la duración efectiva que es la proporción entre el cambio en el precio del activo (bono o portafolio) a un desplazamiento paralelo infinitesimal de la curva spot. A pesar de que esta medida incluye la sensibilidad de cualquier opción implícita en el bono, supone – como la duración modificada – un movimiento paralelo en la curva. Pero como vimos anteriormente, la curva no se desplaza únicamente en forma paralela, también ocurren otros movimientos tales como el *butterfly* y el *twist*, lo cual limita el potencial de conceptos como la duración modificada o efectiva como herramientas de cobertura o inmunización.

Ho (1992) introdujo el concepto de *Key Rate Durations* que son un vector que representa la sensibilidad de un título o portafolio a cambios en cada tasa clave de la curva argumentado que esta medida de sensibilidad tiene varias ventajas contra medidas alternativas:

- Las *Key Rate Durations* permiten identificar la sensibilidad de precio de un bono - con o sin opcionalidades implícitas – a cada segmento de la curva. En este contexto, la duración efectiva es el riesgo total mientras que los *Key Rate Durations* son una descomposición de esta por tramos de la curva.

- El concepto de *Key Rate Durations* reconoce que los movimientos de la curva resultan de múltiples factores de mercado.

- Su cálculo no depende de un modelo de equilibrio de la curva de rendimientos por lo cual son aplicables a un espectro amplio de movimientos de la curva.

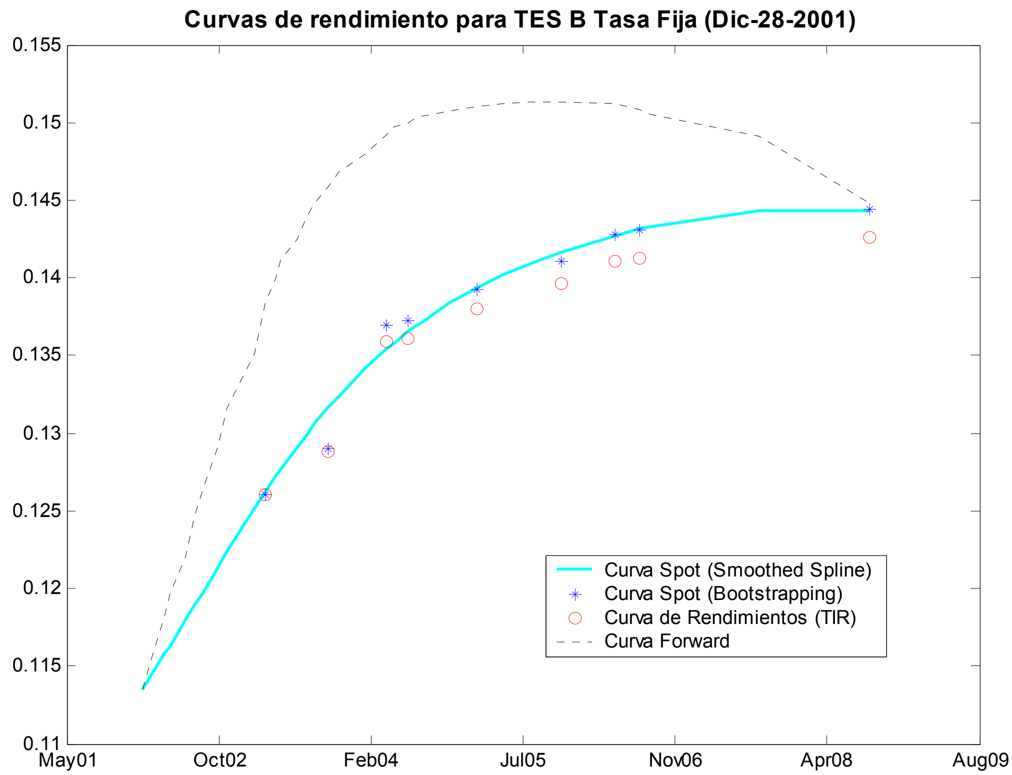
- Es una herramienta sencilla para crear portafolios que repliquen las condiciones de riesgo de bonos con opciones implícitas o cualquier instrumento contingente.

- Su aplicación en gestión de portafolios es muy amplia. Por ejemplo, permite estudiar la exposición a riesgo de tasa interés de portafolio con similar duración pero con exposición desigual a movimientos no paralelos de la curva o estudiar la sensibilidad negativa a ciertas tasas que tiene – por ejemplo - un bono con opcionalidades implícitas. En efecto, estas llevan a subestimar el riesgo de estos instrumentos si se utiliza únicamente la duración efectiva como medida de riesgo.

5.2. Estimación de los Key Rate Durations

La figura 3 muestra los TIRes, los puntos resultantes del bootstrapping, una estimación de la curva spot (cero cupón) y la curva forward. Debido a que la curva spot es creciente monotónica, la curva forward está por encima de esta.

Figura 3 - Ilustración de curva spot (Cero Cupón) Estimada y Bootstrapping



A partir de esta estimación de la curva spot se pueden estimar los *key rate durations* los cuales se definen como un conjunto de medidas (vector) que definen la sensibilidad de precio de un portafolio o instrumento financiero a un dominio de posibles movimientos de la curva de rendimientos. La suma de estas sensibilidades es igual a la duración efectiva del portafolio o instrumento en cuestión.

Recuerde que en la sección 2.1. se definió la tasa spot en t para el plazo m como $i_{(t,t+m)}$.

Si definimos $i^*_{(t+\Delta,t+\Delta+m)}$ como la curva spot desplazada instantáneamente en un intervalo de tiempo infinitesimal Δ. El desplazamiento no es necesariamente paralelo. Como primer paso, definimos el desplazamiento[1] $S(\bullet)$ como la diferencia entre ambas curvas

[1] En estas notas simplificamos la notación presentada originalmente por Ho (1992).

$S_{t,t+\Delta} = i^{*}_{(t+\Delta,t+\Delta+m)} - i_{(t,t+m)}$. Este es posteriormente aproximado con una función lineal piecewise donde se escogen un número ***n*** de tasas claves de la curva $i_{(t,t+m)}$ con *m*=1...*n*. De esta manera el desplazamiento de cada tasa clave está descrito por $S(n)_{t,t+\Delta}$ y cualquier cambio entre las tasas claves es determinado a partir de una interpolación lineal donde debemos asegurarnos que un cambio en una tasa clave no tenga impacto en las otras tasas claves. Podemos decir que el primer desplazamiento $S(1)_{t,t+\Delta}$ es de x puntos básicos (por ejemplo 10 p.b.) si la primera tasa clave $i_{(t,t+1)}$ se mueve de ***x*** puntos básicos y luego el movimiento disminuye linealmente con el incremento en plazo hasta ser cero en la segunda tasa clave y de esta en adelante. El segundo desplazamiento $S(2)_{t,t+\Delta}$ puede ser definido análogamente asegurando que el movimiento es máximo en la tasa clave de 2 períodos - $i_{(t,t+2)}$ - y disminuye en forma lineal siendo cero tanto en la tasa clave anterior -$i_{(t,t+1)}$ - como en la posterior- $i_{(t,t+3)}$. La función piecewise que aproxima $S(\bullet)$ es representada como la suma de los ***n*** desplazamientos de las tasas clave.

Para el cálculo de una key rate duration $d_{n,w}$ de un activo ***w*** – la sensibilidad de precio del portafolio a un desplazamiento de la tasa clave correspondiente –el procedimiento consiste en:

- Modificar ligeramente la tasa spot clave a un plazo específico (incluyendo la interpolación).
- Estimar el precio del instrumento o portafolio con esta curva desplazada, $P^{*}_{n,w}$.

- Una *key rate duration* $d_{n,w}$ se define como: $P^*_{n,w} - P_w = -P_w d_{n,w} * S_n$ donde es S_n es el desplazamiento de la tasa clave incluyendo la interpolación.
- Repitiendo los pasos anteriores es posible estimar los $d_{n,w}$ correspondientes a todas las tasas claves.

Así el impacto en el precio del activo ***w***, P^*_w, a raíz de cualquier desplazamiento $S(\bullet)$ de la curva – incluyendo todo tipo de movimientos – puede ser aproximado al conocer los *key rate durations* ya que $P^*_w - P_w = R^*_w = -P_w \sum_{j=1}^{n} d_{j,w} * S_j$ donde R^*_w es el retorno estimado del portafolio. Los *key rate durations* son entonces una descomposición lineal de la duración efectiva, D_w: $D_w = \sum_{j=1}^{n} d_{j,w}$, la cual para un bono sin opcionalidades es muy similar a la duración modificada.

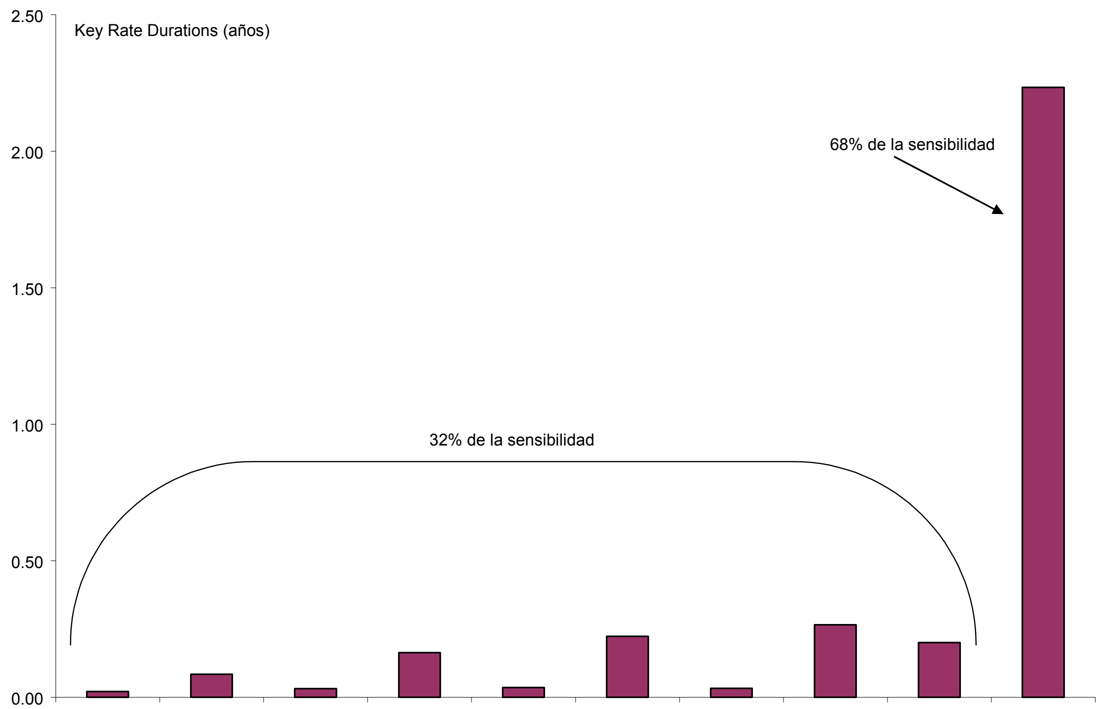
Si tomamos un bono TES B tasa fija con un plazo al vencimiento cercano a 5 años y un cupón de 15%, se obtiene el siguiente vector de sensibilidades donde los desplazamientos $S(\bullet)$ de la curva spot se definen en intervalos semianuales.

Tabla 1 – Key *Rate Durations* bono Tes B tasa fija a 5 años con cupón de 15%

Plazo	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Key Rate Dur.	0.021	0.084	0.032	0.163	0.035	0.224	0.033	0.266	0.201	2.234

Como se observa en la figura 4, el 32% de la exposición a riesgo de tasa de interés resulta de movimientos en las tasas claves menores o iguales a 4.5 años. Claramente, el bono está expuesto a movimientos en la parte corta de la curva y a cambios en la curvatura y pendiente de la curva.

Figura 4 – *Key Rate Durations* Bonos a 5 años (Cupón 15%)



Este ejemplo ilustra una de la aplicaciones de los *key rate durations* para estudiar la sensibilidad a riesgo de tasa de interés incluyendo twists y butterflies. A continuación estudiamos cómo los *key rate durations* permiten analizar la diferencia de exposición a distintos movimientos de la curva para dos portafolio de similar duración pero compuestos por distintos bonos.

5.3. Ejemplo de aplicación de los Key Rate Durations: Target vs. Barbell

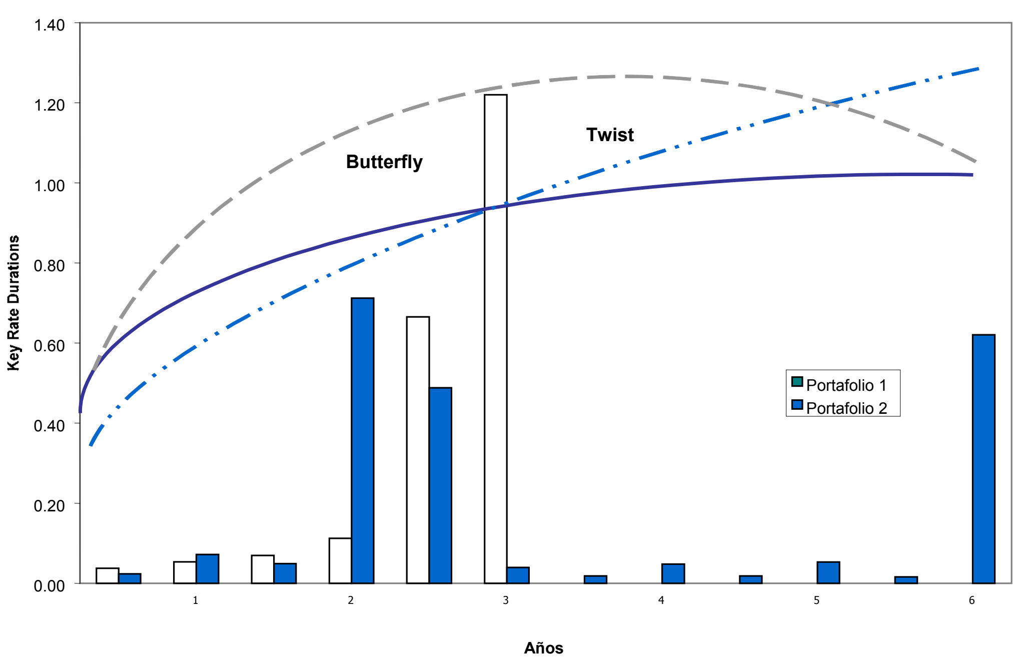
Supongamos que tenemos un portafolio 1 compuesto de 100 unidades de un bono con un vencimiento cercano a 2.8 años con una duración de 2.158 años – un target. Así mismo, construimos un portafolio 2 con la misma duración a partir de 22.32 unidades de un bono a 6 años y 77.68 unidades de un bono a 2.5 años con duraciones de 4.011 y 1.626 respectivamente.

Tabla 2 – Key *Rate Durations* Barbell vs. Target

Plazo	# Un	Plazo												Dur.	Cvx
		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0		
Portafolio 1															
Bono A: 3 años (KR)	100	0.038	0.053	0.070	0.112	0.665	1.220	-	-	-	-	-	-	2.158	0.058
KR Portafolio 1	100	0.038	0.053	0.070	0.112	0.665	1.220	-	-	-	-	-	-	2.158	0.058
Portafolio 2															
Bono B: 2.5 años (KR)		0.036	0.061	0.064	0.126	0.079	0.177	0.083	0.214	0.081	0.238	0.071	2.78	4.011	0.614
Bono C: 6 años (KR)		0.020	0.075	0.045	0.880	0.606	-	-	-	-	-	-	-	1.626	0.025
Part. KR Bono B	22.32	0.008	0.014	0.014	0.028	0.018	0.040	0.019	0.048	0.018	0.053	0.016	0.62	0.895	0.137
Part. KR Bono C	77.68	0.016	0.058	0.035	0.684	0.470	-	-	-	-	-	-	-	1.263	0.019
KR Portafolio 2	100	0.024	0.072	0.049	0.712	0.488	0.040	0.019	0.048	0.018	0.053	0.016	0.62	2.158	0.157

La tabla 2 presenta los *Key rate durations* para cada bono y para los portafolios. Adicionalmente, se observa – como es de esperar – que el barbell tiene mayor convexidad, 0.157 contra 0.058. La gráfica 5 muestra los Key rate durations de cada portafolio.

Figura 5 – *Key Rate Durations* Portafolios 1 y 2



Se observa que, a pesar de tener la misma duración, en el caso de ocurrir un *steepening twist* (incremento en la pendiente) el portafolio 2 tendría pérdidas mientras que el portafolio 1 tendría utilidades. Por otro lado, en el caso de un aumento en la concavidad de la curva, un butterfly negativo, el portafolio 1 tendría pérdidas superiores al portafolio 2. Si se desea, con las tasas proyectadas y los key rate durations de los portafolios es posible estimar las utilidades o pérdidas de cada portafolio utilizando la fórmula $R_w^* = -P_w \sum_{j=1}^{n} d_{j,w} * S_j$ ya que los S_j están implícitos en los movimientos pronosticados, las $d_{j,w}$ son conocidas, así como el precio inicial de los portafolios, P_w.

A través de los *key rate durations* también es posible determinar portafolios de cobertura que protejan contra movimientos tanto paralelos como no paralelos de la curva, calculando los *key rate durations* del portafolio que se desea cubrir y luego componiendo un portafolio con otros activos que tengan la misma exposición a cada tasa clave. A partir de estos ejemplos es claro que esta es una herramienta muy poderosa tanto para manejo y gestión de riesgo como para la toma de posiciones.

6. Conclusiones

En las primeras secciones, este artículo introduce los factores determinantes del comportamiento de las curvas de rendimientos, la descomposición de los desplazamientos de estas en los movimientos típicos y discute la importancia de la curva spot (cero cupón). Posteriormente, en la sección 4, se presenta una metodología de estimación basada en splines cúbicos suavizados, con validación cruzada, con la cual se estima la curva spot de los Tes B tasa fija y se discuten las consideraciones que deben realizarse para escoger un conjunto de métodos de estimación que suplan las múltiples necesidades a las que se enfrenta un inversionista o especulador – valoración de activos y de productos contingentes, medición de riesgo, análisis multifactoriales de la curva de rendimientos, etc. Adicionalmente, esta estimación es utilizada para ilustrar los problemas que pueden surgir al estimar curvas spot, con cualquier metodología, en un mercado ineficiente en términos de arbitraje, así como para estimar los Key Rate Durations – una descomposición lineal por tramos de la curva de la duración efectiva - para títulos específicos o portafolios de bonos. Esto con el fin de mostrar cómo movimientos no paralelos de la curva, cambios en la pendiente o en la curvatura, pueden afectar portafolios con la misma duración.

El punto metodológico principal de estas notas es el de mostrar cómo la escogencia de un método de estimación de la curva spot (cero cupón) es una tarea compleja y dinámica que depende tanto de la aplicación deseada como del momento específico en que se estudie. El abanico de posibilidades en términos de la escogencia de la función de aproximación y el método econométrico, así como de los supuestos implícitos en la estimación, proveen muchas estimaciones alternativas que deben ser estudiadas para determinar las más adecuadas. Más aún, muestra cómo la eficiencia del mercado es determinante en la calidad de los resultados de cualquier método.

Los ejemplos expuestos ilustran la utilidad de la curva spot (cero cupón) en múltiples ámbitos en finanzas tan variados como medición de riesgo, valoración de flujos de caja y productos contingentes (derivados), atribución de desempeño, etc. Más aún muestran cómo a través de estas herramientas, las instituciones financieras pueden modificar el proceso de inversión al incorporar la posibilidad de tomar y cubrir selectivamente riesgos tales como el de exponerse exclusivamente a cambios en la pendiente de la curva manteniendo la exposición a movimientos paralelos o *butterflies* cubiertos o la toma de riesgo crediticio exclusivamente - al poder estimar el margen que los títulos con riesgo crediticio tienen sobre los títulos de la nación. En efecto, el proceso de toma de decisiones se determina en este contexto definiendo un presupuesto de riesgo – pérdidas máximas toleradas por los altos ejecutivos (e.j. Juntas Directivas) – y luego distribuyendo este selectivamente por tipo de riesgo: riesgos de tasa de interés (movimientos paralelos, twists, butterflies), riesgo crediticio, riesgo de prepago, convexidad y los riesgos que se desprenden de los productos derivados. Es hacia este enfoque que las instituciones financieras y los inversionistas institucionales a nivel global se han movido recientemente a raíz de la sofisticación y el desarrollo del mercado.

Referencias

Chambers, D. R.; Carleton W. T. and Waldman D.W. (1984). A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19 pp. 233-252.

Fisher, M., Nychka D. and Zervos D. (1995). Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines. Working Paper 95-1, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, January 1995.

Ho, Thomas S. Y. (1992). Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risk. The Journal of Fixed Income, pp. 29-44.

Mc Culloch, J. H. (1971). Measuring the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Bussiness*, Volume 34, pp. 19-31.

Mc Culloch, J. H. (1975). The Tax Adjusted Yield Curve. *The Journal of Finance*, vol. 320, pp. 811-829.

Nelson y Siegel (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Bussiness*, Volume 70, Issue 4, pp. 473-489.

Shea Gary (1984), Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations.

Vasicek, O. A. and Fong, H.G. (1982). Term Structure Modeling Using Exponential Splines. *The Journal of Finance*, vol. 37, pp. 339-356.